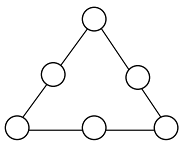
**XXX Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2022»**

**Заключительный тур**

**6 марта 2022 года**

**6 класс**

▷ **1 (10 баллов).** Разность между двузначным числом и произведением его цифр равна утроенному произведению суммы его цифр. Найдите это число.



▷ **2 (10 баллов).** Можно ли расставить в вершинах и на серединах сторон треугольника шесть различных целых чисел так, чтобы каждое число, стоящее в вершине, было равно сумме чисел в двух других вершинах и числа, стоящего на середине противоположной стороны. Приведите хотя бы один пример.

▷ **3 (10 баллов).** Восстановите поврежденную запись

$$\begin{array}{cccc} \times & & 2 & 6 \\ & & * & * \\ \hline & & 5 & * \\ + & * & * & \\ \hline & 8 & * & * \end{array}$$

В ответ запишите результат произведения.

▷ **4 (10 баллов).** Площадь пересечения квадрата и круга составляет 36% площади их объединения, при этом площадь круга вне квадрата составляет 20% площади их объединения. Сколько процентов площади квадрата находится вне круга?

▷ **5 (10 баллов).** Найти наименьшее натуральное число, которое при делении на 5 дает в остатке 3, при делении на 6 — в остатке 4, а при делении на 7 — в остатке 5.

▷ **6 (10 баллов).** Сколько лет брату, если в прошлом году брат был старше сестры в 4 раза, а в будущем году сестра будет младше брата в три раза?

▷ **7 (10 баллов).** Часы пробили полночь. Какой угол между часовой и минутной стрелкой будет через 2022 минуты?

▷ **8 (10 баллов).** Задано двузначное число. Разность между этим числом и двузначным числом, которое получено перестановкой местами чисел десятков и единиц исходного числа, равна 18. Найти разность между максимальным и минимальным значениями таких заданных двузначных чисел.

▷ **9 (10 баллов).** Алиса и Базилио продали за 3 дня 20 порций мороженого. Сегодня Алиса продала столько порций, сколько Базилио вчера и сегодня, но зато позавчера он продал на две порции больше, чем Алиса вчера и позавчера. Сколько порций мороженого продал каждый?

▷ **10 (10 баллов).** Каким минимальным количеством плиток квадратного сечения можно замостить площадь в форме прямоугольника со сторонами 462 и 510 метров?

**ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!**

**XXX Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2022»**

**Заключительный тур**

**6 марта 2022 года**

**6 класс**

▷ **1 (10 баллов).** Разность между двузначным числом и произведением его цифр равна утроенному произведению суммы его цифр. Найдите это число.

▷ **2 (10 баллов).** Можно ли расставить в вершинах и на серединах сторон треугольника шесть различных целых чисел так, чтобы каждое число, стоящее в вершине, было равно сумме чисел в двух других вершинах и числа, стоящего на середине противоположной стороны. Приведите хотя бы один пример.

▷ **3 (10 баллов).** Восстановите поврежденную запись

$$\begin{array}{cccc} \times & & 2 & 6 \\ & & * & * \\ \hline & & 5 & * \\ + & * & * & \\ \hline & 8 & * & * \end{array}$$

В ответ запишите результат произведения.

▷ **4 (10 баллов).** Площадь пересечения квадрата и круга составляет 36% площади их объединения, при этом площадь круга вне квадрата составляет 20% площади их объединения. Сколько процентов площади квадрата находится вне круга?

▷ **5 (10 баллов).** Найти наименьшее натуральное число, которое при делении на 5 дает в остатке 3, при делении на 6 — в остатке 4, а при делении на 7 — в остатке 5.

▷ **6 (10 баллов).** Сколько лет брату, если в прошлом году брат был старше сестры в 4 раза, а в будущем году сестра будет младше брата в три раза?

▷ **7 (10 баллов).** Часы пробили полночь. Какой угол между часовой и минутной стрелкой будет через 2022 минуты?

▷ **8 (10 баллов).** Задано двузначное число. Разность между этим числом и двузначным числом, которое получено перестановкой местами чисел десятков и единиц исходного числа, равна 18. Найти разность между максимальным и минимальным значениями таких заданных двузначных чисел.

▷ **9 (10 баллов).** Алиса и Базилио продали за 3 дня 20 порций мороженого. Сегодня Алиса продала столько порций, сколько Базилио вчера и сегодня, но зато позавчера он продал на две порции больше, чем Алиса вчера и позавчера. Сколько порций мороженого продал каждый?

▷ **10 (10 баллов).** Каким минимальным количеством плиток квадратного сечения можно замостить площадь в форме прямоугольника со сторонами 462 и 510 метров?

**ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!**

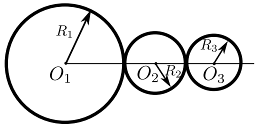
**XXX Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2022»**

**Заключительный тур**

**6 марта 2022 года**

**7 класс**

▷ **1 (10 баллов).** В классе присутствуют учитель и несколько учеников. Найти число учеников, если возраст учителя на 24 года больше среднего возраста учеников и на 20 лет больше среднего возраста всех присутствующих в классе.




▷ **2 (10 баллов).** Центры трех кругов с радиусами $R_1 = 78$ см, $R_2 = 30$ см и $R_3 = 24$ см расположены на одной прямой так, что круги касаются друг друга (см. рис.) и могут вращаться вокруг своих центров. Первый круг начинает вращаться, приводя во вращение второй и третий круг. Все круги вращаются без проскальзывания друг относительно друга. За какое минимальное количество оборотов второго круга система из трех кругов примет исходное (начальное) состояние?

▷ **3 (10 баллов).** Решить уравнение: $\dfrac{(n-2)!}{n!} + \dfrac{(n-1)!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{12}$. Указание: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

▷ **4 (10 баллов).** При каких натуральных значениях $n$ число $n^{n+1} - 2n^2 + 2n - 1$ нацело делится на $(n-1)^2$?

▷ **5 (10 баллов).** Каким минимальным количеством ящиков в форме куба можно полностью заполнить склад, представляющий прямоугольный параллелепипед с длиной 728 см, шириной 616 см и высотой 399 см? (Суммарный объем ящиков должен равняться объему параллелепипеда).

▷ **6 (10 баллов).** Две коробки конфет и 3 пачки чая стоят 910 рублей, а три коробки конфет и 5 пачек чая стоят 1440 рублей. Сколько стоят 4 коробки конфет и 2 пачки чая?

▷ **7 (10 баллов).** Найти все целые значения $m$, при которых дробь $\dfrac{3m+2}{m-4}$ является натуральным числом.

▷ **8 (10 баллов).** В треугольнике $ABC$ угол $\angle C = 70^\circ$. Найти острый угол между биссектрисами углов $\angle A$ и $\angle B$.

▷ **9 (10 баллов).** Найдите числа $\overline{abc5}$ и $\overline{mn}$, если они удовлетворяют условию $\overline{abc5} : 11 = \overline{mn}$.

▷ **10 (10 баллов).** Из полного кувшина, вмещающего 300 грамм концентрированного сока, отлили третью часть и столько же долили воды. Затем из кувшина отлили четвертую часть разведенного сока и снова долили воды. После этого отлили еще третью часть, но водой не доливали. Сколько оказалось в кувшине сока и воды?

**ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!**

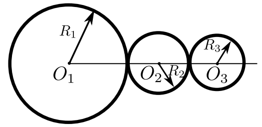

**XXX Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2022»**

**Заключительный тур**

**6 марта 2022 года**

**7 класс**

▷ **1 (10 баллов).** В классе присутствуют учитель и несколько учеников. Найти число учеников, если возраст учителя на 24 года больше среднего возраста учеников и на 20 лет больше среднего возраста всех присутствующих в классе.


▷ **2 (10 баллов).** Центры трех кругов с радиусами $R_1 = 78$ см, $R_2 = 30$ см и $R_3 = 24$ см расположены на одной прямой так, что круги касаются друг друга (см. рис.) и могут вращаться вокруг своих центров. Первый круг начинает вращаться, приводя во вращение второй и третий круг. Все круги вращаются без проскальзывания друг относительно друга. За какое минимальное количество оборотов второго круга система из трех кругов примет исходное (начальное) состояние?

▷ **3 (10 баллов).** Решить уравнение: $\dfrac{(n-2)!}{n!} + \dfrac{(n-1)!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{12}$. Указание: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

▷ **4 (10 баллов).** При каких натуральных значениях $n$ число $n^{n+1} - 2n^2 + 2n - 1$ нацело делится на $(n-1)^2$?

▷ **5 (10 баллов).** Каким минимальным количеством ящиков в форме куба можно полностью заполнить склад, представляющий прямоугольный параллелепипед с длиной 728 см, шириной 616 см и высотой 399 см? (Суммарный объем ящиков должен равняться объему параллелепипеда).

▷ **6 (10 баллов).** Две коробки конфет и 3 пачки чая стоят 910 рублей, а три коробки конфет и 5 пачек чая стоят 1440 рублей. Сколько стоят 4 коробки конфет и 2 пачки чая?

▷ **7 (10 баллов).** Найти все целые значения $m$, при которых дробь $\dfrac{3m+2}{m-4}$ является натуральным числом.

▷ **8 (10 баллов).** В треугольнике $ABC$ угол $\angle C = 70^\circ$. Найти острый угол между биссектрисами углов $\angle A$ и $\angle B$.

▷ **9 (10 баллов).** Найдите числа $\overline{abc5}$ и $\overline{mn}$, если они удовлетворяют условию $\overline{abc5} : 11 = \overline{mn}$.

▷ **10 (10 баллов).** Из полного кувшина, вмещающего 300 грамм концентрированного сока, отлили третью часть и столько же долили воды. Затем из кувшина отлили четвертую часть разведенного сока и снова долили воды. После этого отлили еще третью часть, но водой не доливали. Сколько оказалось в кувшине сока и воды?

**ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!**

**XXX Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2022»**

**Заключительный тур**

**6 марта 2022 года**

**8 класс**

▷ **1 (10 баллов).** Пусть $y$ — действительное число, отличное от нуля. Известно, что $x_1, x_2$ — корни уравнения $x^2+\frac{x}{y}-\frac{y^2}{2}=0$. Докажите, что $x_1^4+x_2^4 \geq 2+\sqrt{2}$.

▷ **2 (10 баллов).** Докажите, что для последовательности чисел $0<a_1<a_2<\cdots<a_9$ выполняется следующее неравенство

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8+a_9}{a_3+a_6+a_9}<3.$$

▷ **3 (10 баллов).** Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение

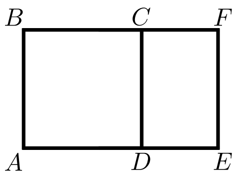
$$x^2-|x+a+3|=|x-a-3|-(a+3)^2$$

имеет единственное решение.

▷ **4 (10 баллов).** В коробке находится в совокупности 30 черных и белых шаров, при этом среди любых 12 шаров есть хотя бы один белый, а среди любых 20 шаров хотя бы один черный. Сколько белых шаров в коробке?

▷ **5 (10 баллов).** Назовем натуральное число интересным, если оно представимо в виде $m^2+4n^2$, где $m$ и $n$ — целые числа. Является ли произведение двух интересных чисел также интересным числом? Ответ обоснуйте.

▷ **6 (10 баллов).** Задан квадрат $ABCD$ со стороной, равной 2. К нему пристроен прямоугольник $CDEF$ (см. рис.). При помощи циркуля и линейки построить прямоугольник $CDEF$, подобный прямоугольнику $ABFE$.




▷ **7 (10 баллов).** Число $a$ при делении на 13 дает остаток 7. Каким будет остаток при делении на 13 числа $15a^2+4a+9$?

▷ **8 (10 баллов).** Сравните числа $2^{17^{17}}$ и $17^{2^{17}}$.

▷ **9 (10 баллов).** Попарно различные числа $a, b, c$ удовлетворяют условию $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}$. Какие значения может принимать $a\cdot b\cdot c$?

▷ **10 (10 баллов).** Известно, что квадратный трехчлен $ax^2+bx+c$ имеет корни. Имеет ли корни квадратный трехчлен $a^3x^2+b^3x+c^3$? Ответ обоснуйте.

**ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!**

**XXX Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2022»**

**Заключительный тур**

**6 марта 2022 года**

**8 класс**

▷ **1 (10 баллов).** Пусть $y$ — действительное число, отличное от нуля. Известно, что $x_1, x_2$ — корни уравнения $x^2+\frac{x}{y}-\frac{y^2}{2}=0$. Докажите, что $x_1^4+x_2^4 \geq 2+\sqrt{2}$.

▷ **2 (10 баллов).** Докажите, что для последовательности чисел $0<a_1<a_2<\cdots<a_9$ выполняется следующее неравенство

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8+a_9}{a_3+a_6+a_9}<3.$$

▷ **3 (10 баллов).** Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение

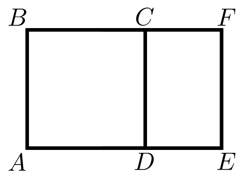
$$x^2-|x+a+3|=|x-a-3|-(a+3)^2$$

имеет единственное решение.

▷ **4 (10 баллов).** В коробке находится в совокупности 30 черных и белых шаров, при этом среди любых 12 шаров есть хотя бы один белый, а среди любых 20 шаров хотя бы один черный. Сколько белых шаров в коробке?

▷ **5 (10 баллов).** Назовем натуральное число интересным, если оно представимо в виде $m^2+4n^2$, где $m$ и $n$ — целые числа. Является ли произведение двух интересных чисел также интересным числом? Ответ обоснуйте.

▷ **6 (10 баллов).** Задан квадрат $ABCD$ со стороной, равной 2. К нему пристроен прямоугольник $CDEF$ (см. рис.). При помощи циркуля и линейки построить прямоугольник $CDEF$, подобный прямоугольнику $ABFE$.




▷ **7 (10 баллов).** Число $a$ при делении на 13 дает остаток 7. Каким будет остаток при делении на 13 числа $15a^2+4a+9$?

▷ **8 (10 баллов).** Сравните числа $2^{17^{17}}$ и $17^{2^{17}}$.

▷ **9 (10 баллов).** Попарно различные числа $a, b, c$ удовлетворяют условию $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}$. Какие значения может принимать $a\cdot b\cdot c$?

▷ **10 (10 баллов).** Известно, что квадратный трехчлен $ax^2+bx+c$ имеет корни. Имеет ли корни квадратный трехчлен $a^3x^2+b^3x+c^3$? Ответ обоснуйте.

**ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!**

**XXX Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2022»**

**Заключительный тур**

**6 марта 2022 года**

**9 класс**

▷ **1 (10 баллов).** Решить уравнение $x^4-8\sqrt{3}x^3+66x^2-72\sqrt{3}x+81=0$.

▷ **2 (10 баллов).** Выясните, каким числом (рациональным или иррациональным) является значение числового выражения:

$$\frac{(\sqrt{\sqrt{20}-4}+\sqrt{\sqrt{20}+4})^2}{\sqrt{(4-\sqrt{20})^2}}-3\sqrt{20}.$$

▷ **3 (10 баллов).** В треугольнике $\triangle ABC$ на сторонах $BC, AC, AB$ отметили точки $D, E, F$ соответственно так, что $AF:FB=BD:DC=CE:EA=2:3$. Отрезки $AD, BE, CF$ попарно пересекаются в точках $P, Q, R$. Площадь треугольника $\triangle ABC$ равна $S_{\triangle ABC}=19$. Найдите площадь треугольника $\triangle PQR$.

▷ **4 (10 баллов).** Докажите, что для последовательности чисел $0<a_1<a_2<\cdots<a_{25}$ выполняется следующее неравенство

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{23}+a_{24}+a_{25}}{a_5+a_{10}+a_{15}+a_{20}+a_{25}}<5.$$

▷ **5 (10 баллов).** В кошельке в достаточном количестве купюры достоинством 100 и 200 рублей. Сколькими различными способами, извлекая купюры по одной, можно расплатиться за покупку, стоимостью 1800 рублей?

▷ **6 (10 баллов).** Четыре положительных числа $a, b, c, d$ таковы, что $ab+cd=$ $=ac+bd=4$ и $ad+bc=5$. Найдите наименьшее возможное значение суммы $a+b+c+d$.

▷ **7 (10 баллов).** Известно, что квадратный трехчлен $ax^2+bx+c$ имеет корни. Имеет ли корни квадратный трехчлен $a^{2021}x^2+b^{2021}x+c^{2021}$? Ответ обоснуйте.

▷ **8 (10 баллов).** Для квадратного трехчлена $f(x)=ax^2+bx+c$ выполняются условия: $f(0)+f(1)=0$; $f(2)+f(3)=0$. Найти корни уравнения $f(x)=0$.

▷ **9 (10 баллов).** Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=48 \\ xy-2z^2-4u^2=576 \end{cases}$$

▷ **10 (10 баллов).** На доске выписаны целые числа от 1 до 10. Игорь и Матвей на листках выписывают некоторые из написанных на доске чисел (хотя бы по одному числу). Какова вероятность того, что найдется хотя бы одно число, которое назовут оба мальчика, когда будут зачитывать выбранные числа?

**ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!**

**XXX Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2022»**

**Заключительный тур**

**6 марта 2022 года**

**9 класс**

▷ **1 (10 баллов).** Решить уравнение $x^4-8\sqrt{3}x^3+66x^2-72\sqrt{3}x+81=0$.

▷ **2 (10 баллов).** Выясните, каким числом (рациональным или иррациональным) является значение числового выражения:

$$\frac{(\sqrt{\sqrt{20}-4}+\sqrt{\sqrt{20}+4})^2}{\sqrt{(4-\sqrt{20})^2}}-3\sqrt{20}.$$

▷ **3 (10 баллов).** В треугольнике $\triangle ABC$ на сторонах $BC, AC, AB$ отметили точки $D, E, F$ соответственно так, что $AF:FB=BD:DC=CE:EA=2:3$. Отрезки $AD, BE, CF$ попарно пересекаются в точках $P, Q, R$. Площадь треугольника $\triangle ABC$ равна $S_{\triangle ABC}=19$. Найдите площадь треугольника $\triangle PQR$.

▷ **4 (10 баллов).** Докажите, что для последовательности чисел $0<a_1<a_2<\cdots<a_{25}$ выполняется следующее неравенство

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{23}+a_{24}+a_{25}}{a_5+a_{10}+a_{15}+a_{20}+a_{25}}<5.$$

▷ **5 (10 баллов).** В кошельке в достаточном количестве купюры достоинством 100 и 200 рублей. Сколькими различными способами, извлекая купюры по одной, можно расплатиться за покупку, стоимостью 1800 рублей?

▷ **6 (10 баллов).** Четыре положительных числа $a, b, c, d$ таковы, что $ab+cd=$ $=ac+bd=4$ и $ad+bc=5$. Найдите наименьшее возможное значение суммы $a+b+c+d$.

▷ **7 (10 баллов).** Известно, что квадратный трехчлен $ax^2+bx+c$ имеет корни. Имеет ли корни квадратный трехчлен $a^{2021}x^2+b^{2021}x+c^{2021}$? Ответ обоснуйте.

▷ **8 (10 баллов).** Для квадратного трехчлена $f(x)=ax^2+bx+c$ выполняются условия: $f(0)+f(1)=0$; $f(2)+f(3)=0$. Найти корни уравнения $f(x)=0$.

▷ **9 (10 баллов).** Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=48 \\ xy-2z^2-4u^2=576 \end{cases}$$

▷ **10 (10 баллов).** На доске выписаны целые числа от 1 до 10. Игорь и Матвей на листках выписывают некоторые из написанных на доске чисел (хотя бы по одному числу). Какова вероятность того, что найдется хотя бы одно число, которое назовут оба мальчика, когда будут зачитывать выбранные числа?

**ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!**

**XXX Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2022»**

**Заключительный тур**

**6 марта 2022 года**

**10 класс**

▷ **1 (10 баллов).** Докажите, что все корни уравнения

$$(x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+2022)=2022$$

меньше $\dfrac{1}{2021!}$, где $2021! = 1\cdot 2\cdot 3\dots 2021$.

▷ **2 (10 баллов).** Пусть число $\overline{abc}$ простое. Через $n$ обозначим наименьший делитель числа $\overline{abcabc}$, отличный от 1, а через $m$ — другой делитель, ближайший к $n$. Найти $n\cdot m$.

▷ **3 (10 баллов).** Решить уравнение $x^8 - 8\sqrt{3}x^6 + 66x^4 - 72\sqrt{3}x^2 + 81 = 0$.

▷ **4 (10 баллов).** Дана арифметическая прогрессия $a_1 = 1, a_2, a_3, \dots, a_{22} = 16$. Вычислите

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{21}}+\sqrt{a_{22}}}.$$

▷ **5 (10 баллов).** В строку выписали 2022 натуральных чисел: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2022}$. Верно ли, что либо одно из них делится на 2022, либо сумма нескольких рядом стоящих делится на 2022? Вывод строго обосновать.

▷ **6 (10 баллов).** Докажите, что для $a \geq 0, b \geq 0$ выполняется неравенство $(a+b)(ab+2025) \geq 180ab$.

▷ **7 (10 баллов).** Найти минимальное значение выражения

$$x^4 - 3x^2 + 4 - \frac{5}{x^2+1} + \frac{1}{(x^2+1)^2}.$$

▷ **8 (10 баллов).** Функция $f(x)$ определена для всех вещественных $x$ и удовлетворяет неравенству

$$\sqrt{5f(x)} - \sqrt{5f(x) - f(5+x)} \geq 5$$

при всех вещественных $x$. Верно ли, что $f(x) \geq 25$ для каждого вещественного $x$? Ответ объясните.

▷ **9 (10 баллов).** В школе математики и программирования лестница с первого этажа на второй этаж состоит из двух пролетов, состоящих из 8 и 9 ступенек. Сколькими способами десятиклассник Вася может спуститься по ней, если он может шагать на следующую ступеньку, или перешагивать через ступеньку, или прыгать через две ступеньки?

▷ **10 (10 баллов).** Три окружности с радиусами $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ попарно касаются друг друга внешним образом, а также касаются внешним образом четвертой окружности с радиусом $r$. Найти $r$.

**ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!**

**XXX Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2022»**

**Заключительный тур**

**6 марта 2022 года**

**10 класс**

▷ **1 (10 баллов).** Докажите, что все корни уравнения

$$(x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+2022)=2022$$

меньше $\dfrac{1}{2021!}$, где $2021! = 1\cdot 2\cdot 3\dots 2021$.

▷ **2 (10 баллов).** Пусть число $\overline{abc}$ простое. Через $n$ обозначим наименьший делитель числа $\overline{abcabc}$, отличный от 1, а через $m$ — другой делитель, ближайший к $n$. Найти $n\cdot m$.

▷ **3 (10 баллов).** Решить уравнение $x^8 - 8\sqrt{3}x^6 + 66x^4 - 72\sqrt{3}x^2 + 81 = 0$.

▷ **4 (10 баллов).** Дана арифметическая прогрессия $a_1 = 1, a_2, a_3, \dots, a_{22} = 16$. Вычислите

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{21}}+\sqrt{a_{22}}}.$$

▷ **5 (10 баллов).** В строку выписали 2022 натуральных чисел: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2022}$. Верно ли, что либо одно из них делится на 2022, либо сумма нескольких рядом стоящих делится на 2022? Вывод строго обосновать.

▷ **6 (10 баллов).** Докажите, что для $a \geq 0, b \geq 0$ выполняется неравенство $(a+b)(ab+2025) \geq 180ab$.

▷ **7 (10 баллов).** Найти минимальное значение выражения

$$x^4 - 3x^2 + 4 - \frac{5}{x^2+1} + \frac{1}{(x^2+1)^2}.$$

▷ **8 (10 баллов).** Функция $f(x)$ определена для всех вещественных $x$ и удовлетворяет неравенству

$$\sqrt{5f(x)} - \sqrt{5f(x) - f(5+x)} \geq 5$$

при всех вещественных $x$. Верно ли, что $f(x) \geq 25$ для каждого вещественного $x$? Ответ объясните.

▷ **9 (10 баллов).** В школе математики и программирования лестница с первого этажа на второй этаж состоит из двух пролетов, состоящих из 8 и 9 ступенек. Сколькими способами десятиклассник Вася может спуститься по ней, если он может шагать на следующую ступеньку, или перешагивать через ступеньку, или прыгать через две ступеньки?

▷ **10 (10 баллов).** Три окружности с радиусами $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ попарно касаются друг друга внешним образом, а также касаются внешним образом четвертой окружности с радиусом $r$. Найти $r$.

**ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!**

**XXX Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2022»**

**Заключительный тур**

**6 марта 2022 года**

**11 класс**

▷ **1 (10 баллов).** Найдите наименьшее значение функции

$$f(a,b,c)=\left(\frac{a+4b}{c}\right)^2+\left(\frac{2b+2c}{a}\right)^2+\left(\frac{c+2a}{2b}\right)^2$$

при $a>0, b>0, c>0$.

▷ **2 (10 баллов).** Решите неравенство:

$$4\left(1-\ln\left(\frac{x}{2021}\right)\right)^{2020}+\left(1+\ln\left(\frac{x}{2021}\right)\right)^{2022}\geq 2^{2022}.$$

▷ **3 (10 баллов).** В школе математики и программирования лестница с первого этажа на второй этаж состоит из двух пролетов, состоящих из 8 и 9 ступенек. Сколькими способами десятиклассник Вася может спуститься по ней, если он может шагать на следующую ступеньку, или перешагивать через ступеньку, или прыгать через две ступеньки?

▷ **4 (10 баллов).** Дана арифметическая прогрессия $a_1=25, a_2, a_3, \ldots, a_{2022}=2025$. Вычислите

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{2021}}+\sqrt{a_{2022}}}.$$

▷ **5 (10 баллов).** Решить уравнение

$$\sqrt{x^2+4x-2}-\sqrt{x^2+6}=\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{3x-1}.$$

▷ **6 (10 баллов).** Докажите, что для $a<1$, $b<1$, $c<1$, $a+b+c\geq\frac{1}{2}$ выполняется неравенство $(1-a)(1-b)(1-c)\leq\dfrac{125}{216}$.

▷ **7 (10 баллов).** Пусть задано множество остатков от деления на 11, $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Пусть над этим множеством задана степенная функция четвертой степени (т.е. все значения переменных и коэффициенты принадлежат только множеству $A$) $f(x)=x^4+3x^3+7x^2+6x+10$. Найдите элемент множества $A$, являющийся суммой корней уравнения $f(x)=0$.

▷ **8 (10 баллов).** Решите систему уравнений $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{yz}}{y+z}, \\ y=\frac{\sqrt{xz}}{x+z}, \\ z=\frac{\sqrt{yx}}{y+x}. \end{cases}$

▷ **9 (10 баллов).** Найти наименьшее значение функции

$$f(x)=x^8-8\sqrt{3}x^6+66x^4-72\sqrt{3}x^2+100.$$

▷ **10 (10 баллов).** Три окружности с радиусами $a=1$, $b=2$, $c=3$ попарно касаются друг друга внешним образом, а также касаются внешним образом четвертой окружности с радиусом $r$. Найти $r$.

**ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!**

**XXX Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2022»**

**Заключительный тур**

**6 марта 2022 года**

**11 класс**

▷ **1 (10 баллов).** Найдите наименьшее значение функции

$$f(a,b,c)=\left(\frac{a+4b}{c}\right)^2+\left(\frac{2b+2c}{a}\right)^2+\left(\frac{c+2a}{2b}\right)^2$$

при $a>0, b>0, c>0$.

▷ **2 (10 баллов).** Решите неравенство:

$$4\left(1-\ln\left(\frac{x}{2021}\right)\right)^{2020}+\left(1+\ln\left(\frac{x}{2021}\right)\right)^{2022}\geq 2^{2022}.$$

▷ **3 (10 баллов).** В школе математики и программирования лестница с первого этажа на второй этаж состоит из двух пролетов, состоящих из 8 и 9 ступенек. Сколькими способами десятиклассник Вася может спуститься по ней, если он может шагать на следующую ступеньку, или перешагивать через ступеньку, или прыгать через две ступеньки?

▷ **4 (10 баллов).** Дана арифметическая прогрессия $a_1=25, a_2, a_3, \ldots, a_{2022}=2025$. Вычислите

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{2021}}+\sqrt{a_{2022}}}.$$

▷ **5 (10 баллов).** Решить уравнение

$$\sqrt{x^2+4x-2}-\sqrt{x^2+6}=\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{3x-1}.$$

▷ **6 (10 баллов).** Докажите, что для $a<1$, $b<1$, $c<1$, $a+b+c\geq\frac{1}{2}$ выполняется неравенство $(1-a)(1-b)(1-c)\leq\dfrac{125}{216}$.

▷ **7 (10 баллов).** Пусть задано множество остатков от деления на 11, $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Пусть над этим множеством задана степенная функция четвертой степени (т.е. все значения переменных и коэффициенты принадлежат только множеству $A$) $f(x)=x^4+3x^3+7x^2+6x+10$. Найдите элемент множества $A$, являющийся суммой корней уравнения $f(x)=0$.

▷ **8 (10 баллов).** Решите систему уравнений $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{yz}}{y+z}, \\ y=\frac{\sqrt{xz}}{x+z}, \\ z=\frac{\sqrt{yx}}{y+x}. \end{cases}$

▷ **9 (10 баллов).** Найти наименьшее значение функции

$$f(x)=x^8-8\sqrt{3}x^6+66x^4-72\sqrt{3}x^2+100.$$

▷ **10 (10 баллов).** Три окружности с радиусами $a=1$, $b=2$, $c=3$ попарно касаются друг друга внешним образом, а также касаются внешним образом четвертой окружности с радиусом $r$. Найти $r$.

**ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!**