САММАТ-2021
Решение задач 10 класса
1 вариант

Задача №1. Решить в натуральных числах уравнение

$$n^4m^2 - k^2 = 2021.$$

Решение: Представим число в виде произведения

$$n^4m^2 - k^2 = (n^2m - k)(n^2m + k) = 2021.$$

Очевидно, что $n^2m - k < n^2m + k$ для натуральных n, m, k. Рассмотрим два возможных разложения числа 2021 на два множителя, первый из которых меньше второго:

а) $2021 = 1 \cdot 2021$; б) $2021 = 43 \cdot 47$.

Тогда получим следующие две системы и, соответственно, уже три решения исходного уравнения в натуральных числах:

а) $\begin{cases} n^2m - k = 1; \\ n^2m + k = 2021; \end{cases}$ тогда $\begin{cases} n^2m = 1011; \\ k = 1010; \end{cases}$ поэтому $n = 1, m = 1011, k = 1010$;

б) $\begin{cases} n^2m - k = 43; \\ n^2m + k = 47; \end{cases}$ тогда $\begin{cases} n^2m = 45; \\ k = 2; \end{cases}$ поэтому либо $n = 1, m = 45, k = 2$; либо $n = 3, m = 5, k = 2$.

Ответ: $n = 1, m = 1011, k = 1010$; $n = 1, m = 45, k = 2$; $n = 3, m = 5, k = 2$.

Задача №2. Решить уравнение:

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{35}{12}.$$

Решение: Пусть $\sin x = a$, $\cos x = b$, тогда имеем систему уравнений

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1; \\ 12a + 12b = 35ab; \end{cases}$$

или, вводя обозначения $u = a + b$, $v = ab$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 1; \\ 12u = 35v, \end{cases}$$

откуда получаем два решения $u = \frac{7}{5}$, $v = \frac{12}{25}$ или $u = -\frac{5}{7}$, $v = -\frac{12}{49}$.

Из первых двух равенств следует, что $\begin{cases} \sin x = \frac{3}{5}; \\ \cos x = \frac{4}{5}; \end{cases}$ или $\begin{cases} \sin x = \frac{4}{5}; \\ \cos x = \frac{3}{5}; \end{cases}$ откуда получаем, что $x = \operatorname{arctg} \frac{3}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = \operatorname{arctg} \frac{4}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Из вторых двух равенств следует, что $\begin{cases} \sin x = -\frac{\sqrt{73}+5}{14}; \\ \cos x = \frac{\sqrt{73}-5}{14}; \end{cases}$ или $\begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{73}-5}{14}; \\ \cos x = -\frac{\sqrt{73}+5}{14}; \end{cases}$ откуда получаем, что $x = -\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{73}+5}{\sqrt{73}-5} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $x = \pi - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{73}-5}{\sqrt{73}+5} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \operatorname{arctg}\frac{3}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = \operatorname{arctg}\frac{4}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; $x = -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{73}+5}{\sqrt{73}-5} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $x = \pi - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{73}-5}{\sqrt{73}+5} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$.

Задача №3. Приведите пример многочлена с целыми коэффициентами, имеющего корень $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$.

Решение: Очевидно, что x является корнем уравнения $x - \sqrt{3} = \sqrt[3]{2}$. Возведем это уравнение в куб $(x - \sqrt{3})^3 = 2 \Rightarrow x^3 + 9x - 2 = 3\sqrt{3}(x^2 + 1)$. Возведем полученное в квадрат, получим $P(x) = x^6 - 9x^4 - 4x^3 - 36x - 23$.

Ответ: $P(x) = x^6 - 9x^4 - 4x^3 - 36x - 23$.

Задача №4. Найти все натуральные числа n, для которых сумма

$$S_n = 1! + 2! + 3! + \dots + n!$$

является полным квадратом ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$). Ответ обосновать.

Решение: Натуральное число не может быть полным квадратом, если оно оканчивается на 3. Легко видеть, что S_n при $n \geq 4$ оканчивается на 3. Действительно, $S_4 = 1!+2!+3!+4! = 33$, а $n!$ при $n \geq 5$ оканчивается нулем, т.е. S_5 и все последующие оканчиваются цифрой 3. Остается проверить, что S_1 и S_3 — полные квадраты.

Ответ: $n = 1$ и $n = 3$.

Задача №5. Вычислить $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$, если α, β и γ — углы треугольника.

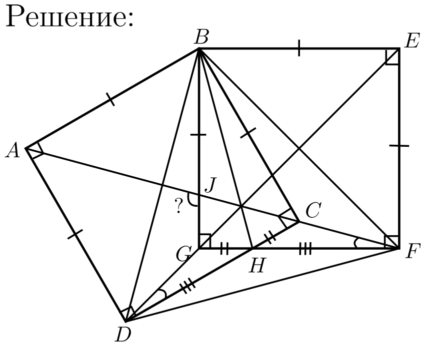
Решение: Обозначим $S = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, $\gamma - \pi = -(\alpha + \beta)$.

$\operatorname{tg}(\gamma - \pi) = \operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \Rightarrow \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma = -(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)$ $\Rightarrow \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma \Rightarrow S = 0$.

Ответ: 0.

Задача №6. Два квадрата $ABCD$ и $BEFG$ имеют общую сторону $BC = BG$. Квадрат $ABCD$ повернули на некоторый угол относительно общей вершины B как центра окружности так, что продолжение диагонали AC проходит через точку F квадрата $BEFG$. Найти угол AJG, где J — точка пересечения стороны BG неподвижного квадрата $BEFG$ с диагональю AC квадрата $ABCD$ после поворота.

Решение:



Расставим буквы и проведем прямые DE и BH.

Покажем, что DE проходит через точку G. Рассмотрим треугольники BCH и BGH. Очевидно, они равны, а, следовательно, равны отрезки CH и GH. Так же равны отрезки DH и FH. Углы GHD и GHF равны как вертикальные. Следовательно, угол GDH равен углу CFH. Поэтому точка G лежит на DE.

Проведем DB, DF и BF.

Очевидно, что $BD = BF$ как диагонали равных квадратов. Угол BGE равен $45°$, поэтому, смежный с ним угол $\angle BGD = 135°$. $\angle EGF = 45°$. Поэтому $\angle DGF = 135°$, как смежный. Рассмотрим треугольники DGB и DFG. У них DG — общая сторона. $BG = FG$ и $\angle BGD = \angle DGF$. Следовательно, эти треугольники равны: $\triangle DGB = \triangle DFG$. Поэтому $BD = DF$. Следовательно, треугольник BDF — равносторонний. Поэтому $\angle DBF = 60°$.

$\angle EBD = \angle EBF + \angle FBD = 45° + 60° = 105°$ и $\angle AJG = \angle EBD$ как углы со взаимно перпендикулярными сторонами (BE перпендикулярен BG, AF перпендикулярен BD).

Ответ: $105°$.

Задача №7. Решить уравнение

$$\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[5]{x^3 \cdot \sqrt[5]{x^3 \cdot \sqrt[5]{x^3 \ldots}}} + x^2 = 2021.$$

Решение: $x \geq 0$.

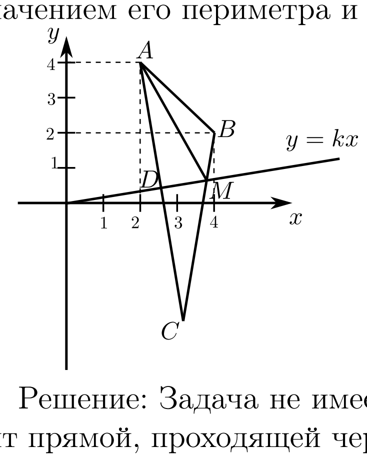
Уравнение можно переписать в виде $x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{3}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\cdots} + x^2 = 2021$.

$\dfrac{3}{5} + \dfrac{3}{5^2} + \dfrac{3}{5^3} + \ldots$ — бесконечно убывающая геометрическая прогрессия: $a_1 = \dfrac{3}{5}$, $q = \dfrac{1}{5}$; ее сумма $S = \dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \dfrac{3}{4}$.

Поэтому, $x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{3}{4}} + x^2 = 2021 \Rightarrow x + x^2 = 2021 \Rightarrow x^2 + x - 2021 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{8084}}{2}$. Поскольку $x \geq 0$, то решение $x = \dfrac{-1 + \sqrt{8084}}{2}$.

Ответ: $x = \dfrac{-1 + \sqrt{8084}}{2}$.

Задача №8. На плоскости заданы точки $A(2,4)$, $B(4,2)$ и прямая $y = kx$ ($k > 0$). Точка M принадлежит прямой $y = kx$. Найти треугольник $\triangle ABM$ с минимальным значением его периметра и вычислить значение периметра.



Решение: Задача не имеет решения при $k_1 \leq k \leq k_2$, где k_1 — угловой коэффициент прямой, проходящей через точку B, а k_2 — через точку A. Найдем эти значения.

$y = k_1x \quad x = 4, y = 2 \quad 2 = k4 \quad \Rightarrow \quad k_1 = \frac{1}{2}$
$y = k_2x \quad x = 2, y = 4 \qquad \Rightarrow \quad k_2 = 2$
При $2 \geq k \geq \frac{1}{2}$ решения нет.
Найдем решение при $\frac{1}{2} > k > 0$ и $k > 2$.

Отложим точку C, симметричную точке A относительно прямой $y = kx$, для этого из A опустим перпендикуляр на $y = kx$ и на нем найдем точку C такую, что $AD = DC$. Проводя прямую через точки C и B, найдем ее пересечение с прямой $y = kx$ (точка M). Треугольник $\triangle AMB$ — искомый треугольник, поскольку $AM + MB = AC$, а кратчайшее расстояние между точками — прямая. Найдем периметр этого треугольника: $P = AB + BC$. $AB = \sqrt{(4-2)^2 + (2-4)^2} = 2\sqrt{2}$.

Найдем координаты точки C. Для этого запишем уравнение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно $y = kx$:
$y = -\frac{1}{k}x + b$, $x = 2, y = 4 \Rightarrow 4 = -\frac{2}{k} + b \Rightarrow b = \frac{4k+2}{k} \Rightarrow y = -\frac{1}{k}x + \frac{4k+2}{k}$ (AC)

Найдем координаты точки D:
$$\begin{cases} y = kx \\ y = -\frac{1}{k}x + \frac{4k+2}{k} \end{cases} \Rightarrow kx = -\frac{1}{k}x + \frac{4k+2}{k} \Rightarrow \begin{cases} x_D = \frac{4k+2}{k} : \frac{k^2+1}{k} = \frac{4k+2}{k^2+1} \\ y_D = k\frac{4k+2}{k^2+1} \end{cases}$$

Точка D — середина отрезка AC, тогда $x_C = 2x_D + x_A = \frac{2(4k+2)}{k^2+1} + 2$, $y_C = 2y_D + y_A = 2k\frac{4k+2}{k^2+1} + 4$.

Тогда длина $CB = \sqrt{\left[\frac{2(4k+2)}{k^2+1} + 2 - 4\right]^2 + \left[2k\frac{4k+2}{k^2+1} + 4 - 2\right]^2} =$
$= \sqrt{\left[\frac{2(4k+2)}{k^2+1} - 2\right]^2 + \left[2k\frac{4k+2}{k^2+1} + 2\right]^2}$.

$P = CB + AB = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{\left(\frac{4k+2-k^2-1}{k^2+1}\right)^2 + \left(\frac{k(4k+2)+k^2+1}{k^2+1}\right)^2} =$
$= 2\sqrt{2} + \frac{2}{k^2+1}\sqrt{(4k-k^2+1)^2 + (5k^2+2k+1)^2}$.

Ответ: $P = CB + AB = 2\sqrt{2} + \frac{2}{k^2+1}\sqrt{(4k-k^2+1)^2 + (5k^2+2k+1)^2}$.

Задача №9. Известно, что в разностороннем треугольнике $\triangle ABC$ длины медиан пропорциональны длинам сторон, к которым они проведены. Найти коэффициент пропорциональности.

Решение: Обозначим длины сторон треугольника $\triangle ABC$ буквами a, b, c $(a < b < c)$, а длины медиан, проведенных к этим сторонам, m_a, m_b, m_c соответственно. Тогда по условию задачи $\frac{m_a}{a} = \frac{m_b}{b} = \frac{m_c}{c} = k \Rightarrow$

$$\begin{aligned} m_a &= ka \\ m_b &= kb \\ m_c &= kc \end{aligned} \tag{1}$$

Воспользуемся формулами

$$\begin{aligned} 4m_a^2 &= 2b^2 + 2c^2 - a^2 \\ 4m_b^2 &= 2a^2 + 2c^2 - b^2 \\ 4m_c^2 &= 2a^2 + 2b^2 - c^2 \end{aligned}$$

Сложим полученные равенства и воспользуемся (1):

$$4k^2(a^2 + b^2 + c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решение останется таким же, если треугольник будет равносторонним. Это решение тоже принималось за верное.

Ответ: $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Задача №10. Найдите область значений функции $f(x) = \sin^2 x + \cos x$. Привести точные нижнюю и верхнюю границы области.

Решение: Заметим, что множество значений $f(x) = 1 + \cos x - \cos^2 x$ совпадает со множеством значений функции $g(t) = 1 + t - t^2$, $-1 \leq t \leq 1$. Функция $g(t)$ непрерывна на отрезке $[-1; 1]$, поэтому ее множество значений есть отрезок $\left[\min\limits_{t\in[-1,1]} g(t), \max\limits_{t\in[-1,1]} g(t)\right]$. Имеем: $g'(t) = 1-2t$, функция на $[-1; 1]$ имеет единственную критическую точку $t = \frac{1}{2}$. Найдем значения функции в критической точке и на концах отрезка: $g(-1) = -1$; $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$; $g(1) = 1$. Отсюда следует, что $\min\limits_{t\in[-1;1]} g(t) = -1$; $\max\limits_{t\in[-1;1]} g(t) = \frac{5}{4}$ и искомое множество значений есть $\left[-1; \frac{5}{4}\right]$. Заметим, что множество значений можно было найти также, построив график квадратичной функции $g(t) = 1 + t - t^2$, $-1 \leq t \leq 1$.

Ответ: $\min\limits_{t\in[-1;1]} g(t) = -1$; $\max\limits_{t\in[-1;1]} g(t) = \frac{5}{4}$.