САММАТ-2024
Решение задач 8 класса

Задача №1. На доске записаны два приведенных квадратных уравнения с положительными дискриминантами. Для каждого уравнения ученик вычислил произведение корней и сумму квадратов его корней, записал эти четыре числа на доску в порядке возрастания и стер исходные уравнения. Какие уравнения были записаны изначально, если на доске остались числа 2, 3, 5 и 10? Укажите все возможные варианты и объясните, почему нет других вариантов.

Решение: Для любых чисел $x \neq y$ выполняется $x^2 + y^2 - 2xy = (x-y)^2 > 0$, т.е. сумма квадратов всегда больше удвоенного произведения различных чисел. Значит, числа 2 и 5 относятся к одному уравнению, а 3 и 10 — к другому.

Тогда для корней первого уравнения справедлива система $\begin{cases} xy = 2, \\ x^2 + y^2 = 5, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1, \\ y = -2, \end{cases}$ или $\begin{cases} x = -2, \\ y = -1, \end{cases}$ и значит, уравнение имеет вид $x^2 \pm 3x + 2 = 0$. Аналогично, второе уравнение — $x^2 \pm 4x + 3 = 0$.

Второй вариант (не находя x и y): Для чисел 2 и 5 имеем $\begin{cases} xy = 2, \\ x^2 + y^2 = 5, \end{cases}$ $\Rightarrow$ $(x+y)^2 = 9 \Rightarrow x + y = \pm 3 \Rightarrow$ по теореме Виета для уравнения $x^2 + px + q = 0$ имеем $x + y = -p$, $xy = q \Rightarrow$ уравнение $x^2 \pm 3x + 2 = 0$. Аналогично, для чисел 3 и 10: $\begin{cases} xy = 3, \\ x^2 + y^2 = 10, \end{cases}$ $\Rightarrow (x+y)^2 = 16 \Rightarrow x + y = \pm 4 \Rightarrow x^2 \pm 4x + 3 = 0.$

Ответ: $x^2 \pm 3x + 2 = 0$, $x^2 \pm 4x + 3 = 0$.

Задача №2. Известно, что если скорость товарного поезда была бы 21,75 км/час, то на заданное расстояние между двумя станциями он затратил бы на 7 часов больше, а при скорости $31\frac{1}{2}$ км/час на это расстояние он затратит на 1 час 40 минут меньше, чем он затрачивает при настоящей скорости движения. Найти настоящую скорость поезда и расстояние между станциями.

Решение: $t_1 = \dfrac{S}{21{,}75}$, $t_2 = \dfrac{S}{31{,}5}$, $t = \dfrac{S}{v} \Rightarrow \begin{cases} \frac{S}{21{,}75} - \frac{S}{v} = 7 \\ \frac{S}{v} - \frac{S}{31{,}5} = 1\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{S}{21{,}75} - \dfrac{S}{31{,}5} = 8\dfrac{2}{3} \Rightarrow$

$$S\left(\frac{4}{87} - \frac{2}{63}\right) = \frac{26}{3} \Rightarrow S\left(\frac{4}{29} - \frac{2}{21}\right) = 26 \Rightarrow 26S = 26 \cdot 21 \cdot 29 \Rightarrow S = 21 \cdot 29 = 609.$$

$$\frac{S}{v} = \frac{S}{21{,}75} - 7 = 28 - 7 = 21 \Rightarrow v = \frac{S}{21} = 29.$$

Ответ: $v = 29$ км/час, $S = 609$ км.

Задача №3. В шахматном турнире участвовали два ученика VII класса и некоторое число учеников VIII класса. По правилам шахматного турнира каждый из участников турнира играет с каждым по одной партии. Если один из играющих выигрывает партию, то он получает одно очко, а его противник получает ноль очков. В случае ничьей играющие получают по 1/2 очка. Два семиклассника набрали вместе

8 очков, а каждый из восьмиклассников набрал одно и то же число очков. Сколько восьмиклассников участвовало в турнире? Найти все решения.

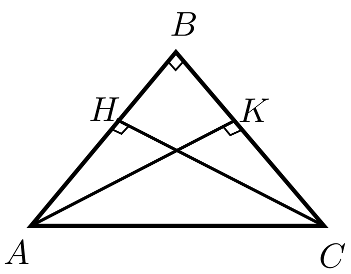
Решение: Пусть x — число восьмиклассников, y — число очков, набранных каждым восьмиклассником. В шахматном турнире с n участниками играется $\dfrac{n(n-1)}{2}$ партий. Поэтому, подсчитывая двумя способами сумму очков, набранных всеми участниками турнира, приходим к уравнению

$$xy + 8 = \frac{(x+1)(x+2)}{2} \ \Rightarrow\ 2y = \frac{(x+1)(x+2) - 16}{x} = x + 3 - \frac{14}{x}.$$

Поэтому x принимает одно из значений 1, 2, 7, 14. Значения 1 и 2 отпадают, поскольку в этих случаях число y будет отрицательным. Задача имеет два ответа: $x = 7$ и $x = 14$. В каждом из случаев $x = 7$ и $x = 14$ нетрудно построить пример турнирной таблицы, удовлетворяющей условию.

Ответ: 7 или 14.

Задача №4. В треугольнике ABC высоты, опущенные на стороны AB и BC, не меньше этих сторон соответственно. Найти углы треугольника.



Решение: Пусть CH и AK — высоты треугольника ABC. По условию $CH \geq AB$ и $AK \geq BC$. А так как перпендикуляр короче наклонной, то $AB \geq AK$ и $BC \geq CH$. Объединяя все эти неравенства, получаем

$$CH \geq AB \geq AK \geq BC \geq CH.$$

Следовательно, все эти неравенства обращаются в равенства, т.е.

$$CH = AB = AK = BC.$$

В частности, $AB = BC$, то есть треугольник равнобедренный. Кроме того, равенство $AB = AK$ означает, что высота AK совпадает со стороной AB, то есть $\angle B = 90°$.

Пояснения к задаче. Из условия $CH = AB = AK = BC$ следует, что точки B, H и K совпадают, а это означает, что $AB \perp BC$ (AB — высота) и $BC \perp AB$ (BC — высота). Поэтому угол $\angle B = 90°$, а поскольку $AB = BC$, то $\angle A = 45°$, $\angle C = 45°$.

Ответ: $45°, 45°, 90°$ или $\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}$.

Задача №5. Определить, при каких r и s число $q = \dfrac{6^{r+s} \cdot 12^{r-s}}{8^r \cdot 9^{r+2s}}$ является целым и $q < 10^6$.

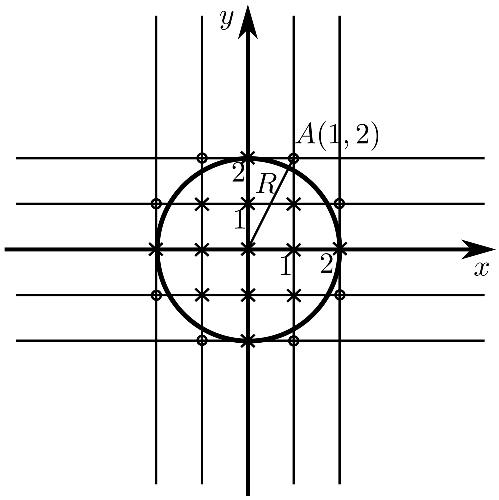
Решение: $q = \dfrac{6^{r+s} \cdot 12^{r-s}}{8^r \cdot 9^{r+2s}} = 2^{r+s+2(r-s)-3r} \cdot 3^{r+s+(r-s)-2(r+2s)} = 2^{-s} \cdot 3^{-4s}$.

Целое число, если $s \leq 0$ и s — целое.

$s = 0 \Rightarrow q = 1$; $s = -1 \Rightarrow q = 162$; $s = -2 \Rightarrow q = 26244$; $s = -3 \Rightarrow q = 4251528$.

Ответ: $s = \{0; -1; -2\}$, $k \in (-\infty; +\infty)$.

Задача №6. Задана система координат XOY с целочисленными значениями координат. В этой системе координат задана окружность, радиус которой равен 2. Пусть n — количество точек (с целочисленными координатами), лежащих внутри или на окружности. На какую наименьшую величину необходимо увеличить радиус, чтобы внутри или на окружности было $2n-5$ точек сетки?



Решение: Заданный круг содержит 13 точек (точка $(1,1)$ находится внутри, а точка $(1,2)$ — снаружи, т.к. $\sqrt{2} < 2 < \sqrt{5}$), они отмечены крестиком.

Итак, $n = 13$ и $2n - 5 = 21$. Нам нужен наименьший круг, содержащий 21 точку, что на 8 больше, чем в предыдущем круге. Следующие ближайшие точки к началу координат — это $(\pm1, \pm2)$ и $(\pm2, \pm1)$, которых 8, они отмечены кружками. Значит, радиус должен быть увеличен на $\sqrt{5}-2$, поскольку $R = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$, $\Delta r = R - 2 = \sqrt{5} - 2$.

Ответ: $\sqrt{5}-2$.

Задача №7. Пусть a, b и c — положительные целые числа, такие что

$$\begin{cases} ab + bc + ca + 2(a+b+c) = 405, \\ abc - a - b - c = -2. \end{cases}$$

Найдите $a+b+c$.

Решение: Сложив уравнения, получим $abc + ab + bc + ca + a + b + c = 403$, откуда

$$ab(c+1) + b(c+1) + a(c+1) + c = 403,$$
$$ab(c+1) + b(c+1) + a(c+1) + (c+1) - 1 = 403,$$
$$(a+1)(b+1)(c+1) = 404.$$

Так как a, b, c — целые положительные числа, необходимо разложить 404 на положительные целые числа, не меньшие двойки. Замечаем, что число 101 — простое, поэтому единственный способ это сделать: $404 = 2 \cdot 2 \cdot 101$. Таким образом, a, b, c в некотором порядке равны 1, 1, 100.

Ответ: 102.

Задача №8. Вычислите $\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} + \dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{8}}\right)^6$.

Решение:

$$\left(\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{8}}\right)^6 = \left(\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{5}-\sqrt{2})} + \frac{3(\sqrt{8}-\sqrt{5})}{(\sqrt{5}+\sqrt{8})(\sqrt{8}-\sqrt{5})}\right)^6 =$$
$$= (\sqrt{5}-\sqrt{2}+2\sqrt{2}-\sqrt{5})^6 = 8.$$

Ответ: 8.

Задача №9. Найти натуральное число $n > 1$, если известно, что числа 502, 661 и 873 при делении на n дают одинаковые остатки.

Решение:

$$\begin{cases} 502 = an + r, \\ 661 = bn + r, \\ 873 = cn + r. \end{cases}$$

Вычитая почленно из третьего равенства второе, а из второго — первое, получим

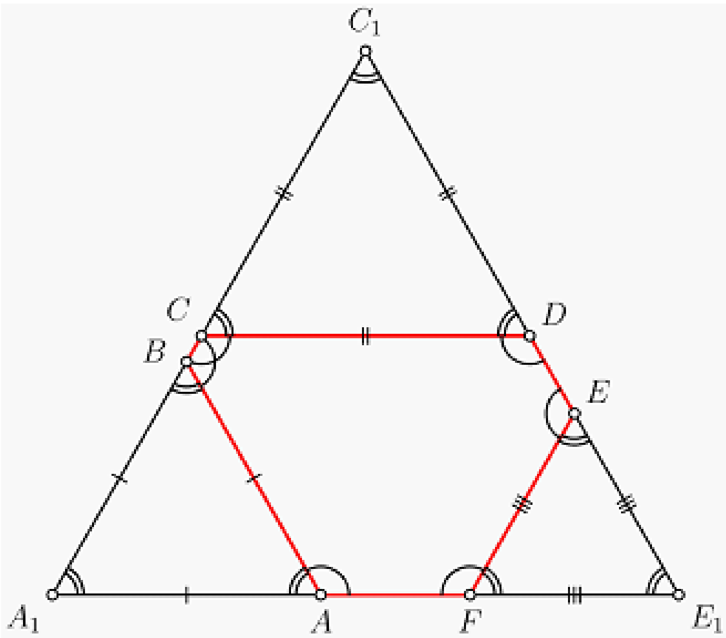
$$212 = (c - b)n, \quad 159 = (b - a)n.$$

НОД$(212, 159) = 53$ — простое число, а значит, $n = 53$.

Ответ: 53.

Задача №10. В шестиугольнике $ABCDEF$ все внутренние углы равны. Найти BC, если $AB = 9$, $DE = 3$, $EF = 7$.

Решение: Продолжим стороны шестиугольника до пересечения так, как указано на рисунке. Все углы шестиугольника равны 120°, так как сумма углов 6-уголника равна $4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$. Тогда треугольники ABA_1, CDC_1, EFE_1 — равносторонние. Тогда треугольник $A_1C_1E_1$ — тоже равносторонний, тогда $AB + BC + CD = CD + DE + EF$, следовательно $AB + BC = DE + EF$, тогда $BC = DE + EF - AB = 1$.



Ответ: $BC = 1$.