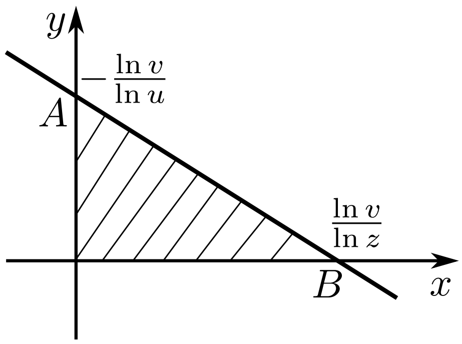
САММАТ-2024
Решение задач 11 класса

Задача №1. Пусть z, u, v — положительные числа. При каких ограничениях на z, u, v существует конечное число положительных целых чисел (x, y), удовлетворяющих неравенству $vu^y < z^x$.

Решение: Прологарифмируем это неравенство (числа u, v, z — положительные, а функция $y = \ln x$ — возрастающая). $\ln v + y \ln u < x \ln z \Rightarrow y \ln u < x \ln z - \ln v$. Получили неравенство для линейной функции.



Для того, чтобы пары (x, y) были целыми положительными числами, график линейной функции должен располагаться в первой четверти так, как это показано на рисунке, а интересующая нас область — заштрихована. Пусть $\ln u > 0$, тогда имеем $y < \dfrac{\ln z}{\ln u}x - \dfrac{\ln v}{\ln u}$ (эта ситуация изображена на рисунке). Если $\ln u > 0$, $u > 1$, то $\begin{cases} -\dfrac{\ln v}{\ln u} > 0, \\ \dfrac{\ln v}{\ln z} > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln v < 0, \\ \ln z < 0; \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} 0 < v < 1, \\ 0 < z < 1. \end{cases}$

Случай $\ln u < 0$ при любых $\ln z$ и $\ln v$ задает неограниченную область изменения (x, y), он не реализуем по условию задачи.

Ответ: $u > 1$, $0 < v < 1$, $0 < z < 1$.

Задача №2. Найдите точки плоскости, обе координаты которых являются натуральными числами, меньшими двадцати, и через которые проходит график функции $y = 4\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{12}\right)$. Укажите все возможные варианты и объясните, почему нет других вариантов.

Решение: Во множество значений функции $y = 4\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{12}\right)$ входит только четыре натуральных числа: 1, 2, 3 и 4. Решим для каждого из них соответствующее уравнение.

1) $4\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{12}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi x}{12}\right) = \pm\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\pi x}{12} = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pm 2 + 12n$, $n \in \mathbb{Z}$; промежутку $[1; 19]$ принадлежат корни $x = 2$, $x = 10$ и $x = 14$;

2) $4\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{12}\right) = 2 \Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi x}{12}\right) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \dfrac{\pi x}{12} = \pm\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pm 3 + 12n$, $n \in \mathbb{Z}$; промежутку $[1; 19]$ принадлежат корни $x = 3$, $x = 9$ и $x = 15$;

3) $4\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{12}\right) = 3 \Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi x}{12}\right) = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\pi x}{12} = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pm 4 + 12n$, $n \in \mathbb{Z}$; промежутку $[1; 19]$ принадлежат корни $x = 4$, $x = 8$ и $x = 16$;

2) $4\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{12}\right)=4 \Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi x}{12}\right)=\pm 1 \Leftrightarrow \dfrac{\pi x}{12}=\pm\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\pm 6+12n$, $n\in\mathbb{Z}$; промежутку $[1;19]$ принадлежат корни $x=6$ и $x=18$.

Ответ: $(2;1)$, $(3;2)$, $(4;3)$, $(6;4)$, $(8;3)$, $(9;2)$, $(10;1)$, $(14;1)$, $(15;2)$, $(16;3)$, $(18;4)$.

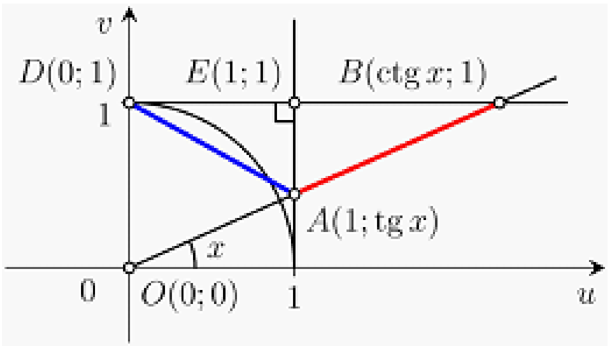
Задача №3. Найти решения неравенства

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos x}>\sqrt{1+(\operatorname{tg} x-1)^2},$$

принадлежащие интервалу $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Решение: Ясно, что $\sin x\neq 0$ и $\cos x\neq 0$ при всех $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Изобразим первую четверть единичной тригонометрической окружности и проведём две касательные к ней в точках $C(1;0)$ и $D(0;1)$. Проведём луч с вершиной в начале координат точке $O(0;0)$ и образующий угол в x радиан с осью абсцисс. Пусть он пересекает построенные касательные в точках A и B, тогда координаты этих точек равны $A(1;\operatorname{tg} x)$ и $B(\operatorname{ctg} x;1)$, при этом расстояния от этих точек до начала координат равны

$$OA=\sqrt{1^2+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1}{\sqrt{\cos^2 x}}=\frac{1}{\cos x},$$
$$OB=\sqrt{\operatorname{ctg}^2 x+1^2}=\frac{1}{\sqrt{\sin^2 x}}=\frac{1}{\sin x}.$$



Тогда длина отрезка AB равна левой части неравенства, то есть

$$AB=OB-OA=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos x}.$$

Заметим, что левая часть неравенства должна быть положительной, то есть справедливо неравенство $\cos x>\sin x$, откуда получаем, что $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$. Также заметим, что правая часть неравенства равна длине отрезка AD, то есть

$$AD=\sqrt{(1-0)^2+(\operatorname{tg} x-1)^2}=\sqrt{1+(\operatorname{tg} x-1)^2}.$$

Таким образом, неравенство означает, что длина отрезка AB должна быть больше длины отрезка AD. Это условие эквивалентно условию, что проекция EB отрезка

AB на прямую BD должна быть больше проекции DE отрезка AD на прямую BD. Последнее условие выполнится, если и только если абсцисса точки B будет больше 2, что эквивалентно неравенству $\operatorname{ctg} x > 2$, или $0 < \operatorname{tg} x < \frac{1}{2}$, или $0 < x \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$, то есть $x \in \left(0; \operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right)$.

Ответ: $x \in \left(0; \operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right)$.

Задача №4. Функция $f(n)$ определена для целых положительных чисел, удовлетворяет условию $f(1) = 1$ и двум соотношениям $f(3n) = 3f(n)$, $f(3n+1) = 9f(n)$. Найдите числа n, удовлетворяющие равенству $f(n) = 81$.

Решение: Значение 81 можно получить, применив: 1) первое соотношение 4 раза; 2) первое соотношение дважды и второе — один раз; 3) второе соотношение — дважды. Однако для второго варианта имеет значение, в каком порядке применяется правило. Таким образом:

1) $f(81) = 3f(27) = 9f(9) = 27f(3) = 81f(1) = 81 \Rightarrow n = 81$ (первое соотношение применили 4 раза);

2.1) $81 = f(1) \cdot 81 = 27f(3) = 3 \cdot 9f(3) = 3f(10) = f(30) \Rightarrow n = 30$ (первое, второе, первое);

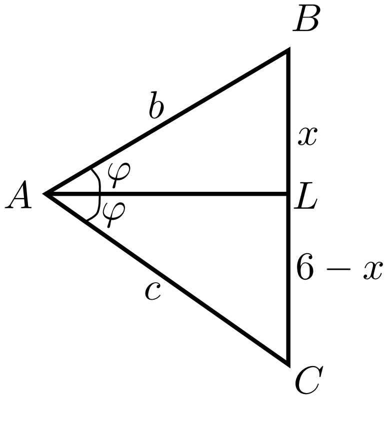
2.2) $81 = f(1) \cdot 81 = 27f(3) = 9 \cdot 3f(3) = 9f(9) = f(28) \Rightarrow n = 28$ (первое, первое, второе);

2.3) $81 = f(1) \cdot 81 = 9 \cdot 9f(1) = 9f(4) = 3 \cdot 3f(4) = 3f(12) = f(36) \Rightarrow n = 36$ (второе, первое, первое);

3) $81 = f(1) \cdot 81 = 9f(4) = f(13) \Rightarrow n = 13$ (второе соотношение применили 2 раза).

Ответ: 13, 36, 28, 30, 81.

Задача №5. В $\triangle ABC$ $\cos A = \frac{1}{8}$, биссектриса $AL = \frac{10}{3}$, $BC = 6$. Найти длины сторон AB и AC.



Решение:Пусть $AB = b$, $AC = c$, $BL = x \Rightarrow CL = 6 - x$. По свойству биссектрис $\frac{b}{x} = \frac{c}{6-x}$, $6b - bx = cx$, $x = \frac{6b}{b+c}$, $6 - x = \frac{6c}{b+c}$.

$\cos 2\varphi = \frac{1}{8}$ по условию, $2\cos^2\varphi - 1 = \frac{1}{8}$, $\cos^2\varphi = \frac{9}{16}$, $\cos\varphi = \frac{3}{4}$ ($\angle A$ — острый, $\angle\varphi$ тем более).

$\triangle ABL$: $x^2 = \frac{36b^2}{(b+c)^2} = b^2 + \frac{100}{9} - 2b \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{3}{4} = b^2 + \frac{100}{9} - 5b$. Аналогично для $\triangle ACL$: $\frac{36c^2}{(b+c)^2} = c^2 + \frac{100}{9} - 5c$.

$$\begin{cases} \dfrac{36b^2}{(b+c)^2} = b^2 + \dfrac{100}{9} - 5b, \\ \dfrac{36c^2}{(b+c)^2} = c^2 + \dfrac{100}{9} - 5c. \end{cases}$$

Вычитаем из первого условия второе, получаем

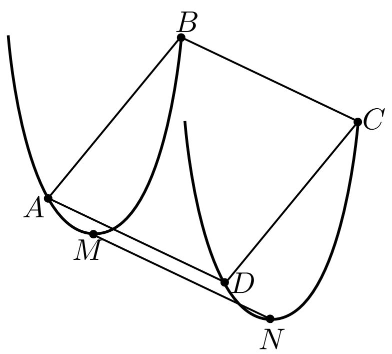
$$\frac{36(b^2-c^2)}{(b+c)^2} = b^2 - c^2 - 5(b-c). \tag{1}$$

а) $b = c$. Тогда $\triangle ABC$ — равнобедренный. $x = 3$. AL еще и высота $\Rightarrow$ $b = \sqrt{x^2 + AL^2} = \sqrt{9 + \dfrac{100}{9}} = \dfrac{\sqrt{181}}{3} = c$.

б) $b \neq c$. Тогда условие (1) можно сократить на $b - c \neq 0$. $\dfrac{36(b+c)}{(b+c)^2} = b + c - 5$. Обозначим $b + c = t$, $t > 0$. $\dfrac{36}{t} = t - 5$ или $t^2 - 5t - 36 = 0 \Rightarrow t_1 = -4$ не подходит, $t_2 = 9$, тогда $x = \dfrac{6b}{b+c} = \dfrac{2}{3}b$. $x^2 = \dfrac{4}{9}b^2 = b^2 + \dfrac{100}{9} - 5b \Rightarrow \dfrac{5}{9}b^2 - 5b + \dfrac{100}{9} = 0 \Rightarrow$ $b^2 - 9b + 20 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} b_1 = 4, \text{ тогда } c_1 = 5; \\ b_2 = 5, \text{ тогда } c_2 = 4. \end{array}$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{181}}{3}$ или $(4,5)$ и $(5,4)$.

Задача №6. Две смежные вершины квадрата лежат на параболе $y = x^2 - 4x + 5$, а две другие — на параболе $y = x^2 - 2ax + a^2 + 2a$. Найти наименьшую площадь этого квадрата при всевозможных значениях параметра a.



Решение: Поскольку коэффициенты при x^2 в обоих уравнениях одинаковые, то графики этих двух парабол абсолютно идентичны, т.е. одна парабола может быть получена из другой, и отличаются только положением вершин этих парабол: $M(2,1)$ — вершина первой параболы, а $N(a, 2a)$ — вершина второй параболы. Поскольку хорды AB и DC этих двух парабол равны и параллельны, то они расположены одинаково относительно соответствующих вершин парабол. Значит, $MN = AD$, т.е.

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD = MN^2 = (a-2)^2 + (2a-1)^2 = 5a^2 - 8a + 5 = 5\left(a - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{9}{5}.$$

Таким образом, $S_{\min} = \dfrac{9}{5}$ (при $a = \dfrac{4}{5}$).

Ответ: $S_{\min} = \dfrac{9}{5}$ при $a = \dfrac{4}{5}$.

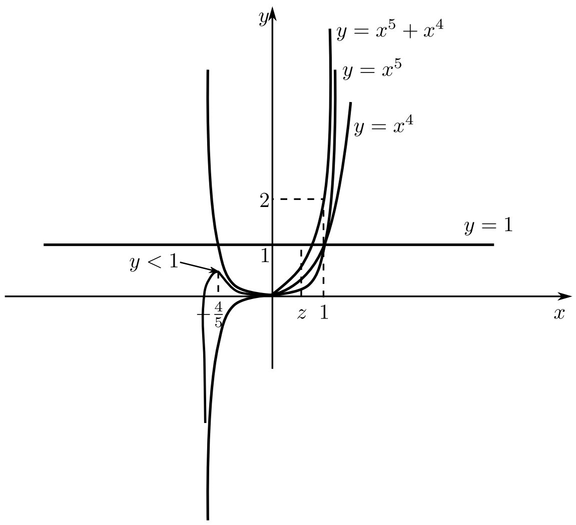
Задача №7. Наудачу взятое целое положительное число N возведено в куб. Найти вероятность того, что полученное число оканчивается на 44. Выписать все двузначные числа, удовлетворяющие условию задачи.

Решение: Представим N в виде $N = a + 10b + \ldots$, где a — цифра единиц, b — цифра десятков. Они могут принимать любые значения от 0 до 9 включительно. На формирование двух последних цифр числа влияют только a и b. Тогда $N^3 = a^3 + 30a^2b + \ldots$ Для вычисления вероятности используем классическое определение $P(A) = \dfrac{m}{n}$, где m — число благоприятных исходов, n — число всех возможных исходов. Число всех возможных исходов $n = 10 \cdot 10 = 100$ (10 исходов для a, столько же для b). Последняя цифра N^3 равна 4. Среди однозначных чисел есть только одно число, куб которого заканчивается на 4. Это число 4, а именно $4^3 = 64$. Следовательно, $a = 4$, при этом 6 переходит в разряд десятков. Для нахождения последней цифры мы имеем $\dfrac{30a^2b}{10} + 6$ или, подставляя $a = 4$, получим $48b + 6$. Это число будет оканчиваться на четыре, если $8b$ заканчивается на 8 ($8 + 6 = 14$). Этому удовлетворяют два значения $b = 1$ (8) и $b = 6$ (48). Получим 2 благоприятных исхода ($m = 2$). Следовательно, $P = \dfrac{2}{100} = 0{,}02$.

Двузначные числа, удовлетворяющие условию задачи — 14, 64.

Ответ: 0,02.

Задача №8. Величина z является корнем уравнения $x^5 + x^4 = 1$. Вычислить величину $S = \prod\limits_{n=0}^{\infty}(1 + z^{2^n}) = (1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)(1+z^{16}) \cdot \ldots$



Решение: Покажем, что $0 < z < 1$.

I) Имеем, $z^4(1 + z) = 1$.

Если $z \le -1$, то $z^4(1 + z) \le 0$.

Если $-1 < z < 0$, то $z^4(1 + z) < z^4 < 1$.

Если $z \ge 1$, то $z^4(1 + z) \ge 2$.

Следовательно, $0 < z < 1$.

II) $0 < z < 1$ следует из графического решения исходного уравнения.

Имеем далее:

$1 + z = 1 + z$

$(1 + z)(1 + z^2) = 1 + z + z^2 + z^3$

$(1 + z)(1 + z^2)(1 + z^4) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7$

и т.д. В конечном итоге имеем бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \dfrac{1}{1 - z}$. Учитывая, что $z^4(1 + z) = 1$, можно получить еще эквивалентные выражения для S:

$$S = \frac{1}{1-z} = \frac{z^4(z+1)}{1-z} = \frac{z^5 + z^4}{1-z} = \frac{2}{1-z} - (z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 2)$$

последнее выражение — деление числителя на знаменатель. Все значения S — верные.

Ответ: $\dfrac{1}{1-z} = \dfrac{z^5 + z^4}{1-z}$ и еще ряд эквивалентных выражений.

Задача №9. В куб с ребром $a = 60$ вписаны три сферы одинакового радиуса r так, что сферы попарно касаются друг друга, каждой грани куба касается какая-то сфера и каждая сфера касается как минимум двух граней куба. Найти возможные значения радиуса r, если известно, что r — натуральное число.

Решение: Пусть a — ребро куба, r — радиус каждой из трёх одинаковых сфер. Рассмотрим множество точек, которому могут принадлежать центры сфер.

Так как каждая сфера касается как минимум двух граней куба, тогда центры сфер принадлежат ребрам другого, меньшего куба с ребром $b = a - 2r$, центр которого совпадает с центром исходного куба и грани которого параллельны соответствующим граням исходного куба и находятся на расстоянии радиуса r от соответствующих граней исходного куба (смотри рисунок 1).

Поскольку сферы попарно касаются друг друга, тогда центры сфер образуют правильный треугольник со стороной $c = 2r$. При этом каждой грани куба касается какая-то сфера, поэтому ребра, на которых лежат центры сфер (вершины правильного треугольника), в совокупности являются границами всех шести граней меньшего куба с ребром $b = a - 2r$.

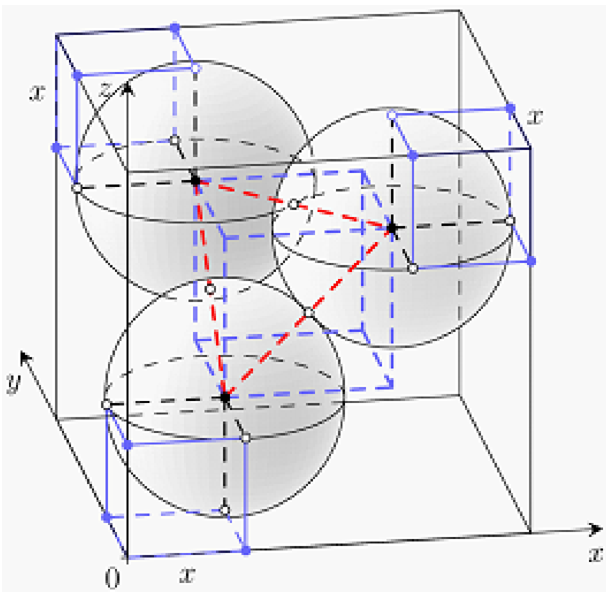


Рисунок 1

Введем систему координат с началом в вершине исходного куба и расположим вершины правильного треугольника так, чтобы они находились на трёх скрещивающихся ребрах меньшего куба, а также находились на расстоянии x от некоторых трёх граней исходного куба. Тогда координаты вершин правильного треугольника имеют вид

$$(x; r; r), \quad (r; a-r; a-x), \quad (a-r; x; a-r),$$

где $r \leq x \leq a-r$, то есть $x \in [r; a-r]$. Нетрудно проверить, что стороны треугольника одинаковы и равны

$$\sqrt{(r-x)^2 + (a-2r)^2 + (a-x-r)^2} = 2r,$$

откуда получаем уравнение

$$\begin{gathered}
(r-x)^2+(a-2r)^2+(a-x-r)^2=4r^2, \quad \Rightarrow \\
r^2-2rx+x^2+a^2-4ra+4r^2+a^2+r^2+x^2-2ar-2ax+2rx=4r^2, \quad \Rightarrow \\
2x^2+2r^2+2a^2-2ax-6ra=0, \quad \Rightarrow \\
r^2-3ra+x^2-ax+a^2=0, \quad \Rightarrow \\
r^2-3ra+x^2-2\cdot x\cdot\frac{a}{2}+\frac{a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}=0, \quad \Rightarrow \\
r^2-3ra+\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3a^2}{4}=0, \quad \Rightarrow \\
r_{1,2}=\frac{3a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{3a^2}{4}}=\frac{3a}{2}\pm\sqrt{\frac{9a^2}{4}-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{3a^2}{4}}= \\
=\frac{3a}{2}\pm\sqrt{\frac{3a^2}{2}-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}.
\end{gathered}$$

Так как радиус r не может быть больше a и тем более быть больше $\frac{3a}{2}$, тогда знак «+» невозможен, поэтому

$$r=\frac{3a}{2}-\sqrt{\frac{3a^2}{2}-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Поскольку функция $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$ монотонно возрастает, тогда наименьшее значение r будет при наименьшем возможном значении слагаемого $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=0$, то есть при $x=\frac{a}{2}$. В этом случае получим

$$r=\frac{3a}{2}-\sqrt{\frac{3a^2}{2}-0}=\frac{3a}{2}-\sqrt{\frac{3}{2}}a=\frac{3a}{2}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}a=\frac{3-\sqrt{6}}{2}a.$$

Наибольшее значение значение r будет при наибольшем значении $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$. На отрезке $x\in[r;a-r]$ квадратичная функция $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$ принимает одинаковые наибольшие значения в концах отрезка $x=r$ и $x=a-r$, поскольку

$$\left((a-r)-\frac{a}{2}\right)^2=\left(a-r-\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}-r\right)^2=\left(r-\frac{a}{2}\right)^2.$$

Тогда наибольшее значение r можно найти из уравнения $r^2-3ra+x^2-ax+a^2=0$ при $x=r$. Получим

$$r^2-3ra+r^2-ar+a^2=0, \quad \Rightarrow \quad 2r^2-4ra+a^2, \quad \Rightarrow \quad r^2-2ra+\frac{a^2}{2}, \quad \Rightarrow$$

$$r_{1,2}=a\pm\sqrt{a^2-\frac{a^2}{2}}=a\pm\sqrt{\frac{a^2}{2}}=a\pm\frac{1}{\sqrt{2}}a=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}a.$$

Так как радиус r не может быть больше a, тогда знак «+» невозможен, поэтому

$$r = \frac{2-\sqrt{2}}{2}a.$$

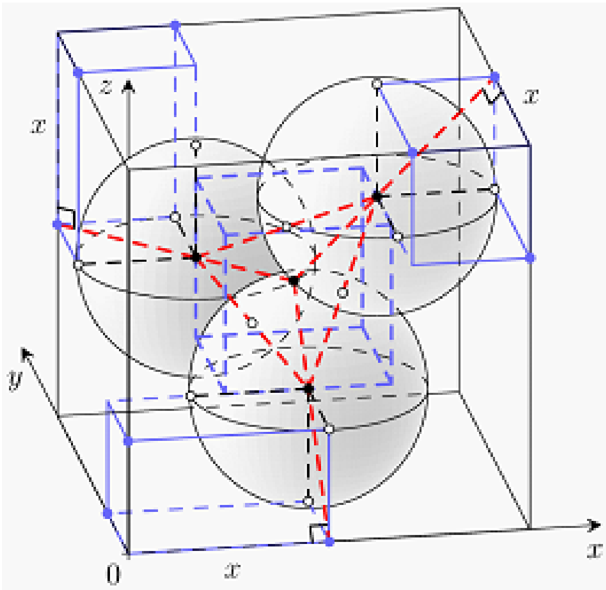


Рисунок 2

Заметим, что во втором случае все три сферы касаются трёх граней куба, поэтому радиус сферы больше, чем $r = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}a$, быть не может (иначе сферы выйдут за границу куба). А в первом случае центр равностороннего треугольника, образованного центрами трёх сфер, находится в центре исходного куба и отрезки, соединяющие центр равностороннего треугольника с его вершинами перпендикулярны соответствующим ребрам исходного куба, поэтому радиус сферы меньше, чем $r = \dfrac{3-\sqrt{6}}{2}a$, тоже быть не может (смотри рисунок 2). Наконец, поскольку функция $r = \dfrac{3a}{2} - \sqrt{\dfrac{3a^2}{2} - \left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2}$ непрерывна на отрезке $x \in [r; a-r]$, то радиус сфер r принимает значения из отрезка $r \in \left[\dfrac{3-\sqrt{6}}{2}a; \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}a\right]$.

Подставим известное значение $a = 60$, тогда получим неравенство

$$30(3-\sqrt{6}) \le r \le 30(2-\sqrt{2}), \quad \Rightarrow 90 - 30\sqrt{6} \le r \le 60 - 30\sqrt{2}.$$

Найдем квадраты вычитаемых чисел.

Так как $(30\sqrt{6})^2 = 5400$ и $73^2 = 5329$, $74^2 = 5476$, тогда $73 < 30\sqrt{6} < 74$, и поэтому

$$16 = 90 - 74 < 90 - 30\sqrt{6} < 90 - 73 = 17.$$

Так как $(30\sqrt{2})^2 = 1800$ и $42^2 = 1764$, $43^2 = 1849$, тогда $42 < 30\sqrt{2} < 43$, и поэтому

$$17 = 60 - 43 < 60 - 30\sqrt{2} < 60 - 42 = 18.$$

Таким образом, единственное возможное значение радиуса сфер r, которое является натуральным числом, равно $r = 17$.

Ответ: $r = 17$.

Задача №10. Решить уравнение

$$\sqrt{\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-1}-\sqrt{x}}-\sqrt[4]{2x-1}-\sqrt[4]{3x-1}+\sqrt[4]{x}=0.$$

Решение: Обозначив $\sqrt{2x-1} = a$, $\sqrt{3x-1} = b$, $\sqrt{x} = c$, запишем уравнение в виде

$$\sqrt{a+b-c}-\sqrt{a}=\sqrt{b}-\sqrt{c}.$$

Домножим каждое из двух выражений на сопряженное

$$\frac{(\sqrt{a+b-c}-\sqrt{a})(\sqrt{a+b-c}+\sqrt{a})}{\sqrt{a+b-c}+\sqrt{a}}=\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

$$\frac{b-c}{\sqrt{a+b-c}+\sqrt{a}}=\frac{b-c}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

Отсюда получаем два случая:

1) $b-c=0$, т.е. $\sqrt{3x-1}=\sqrt{x}$, $3x-1=x$, $x_1=\dfrac{1}{2}$.

2) $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{a}=\sqrt{b}+\sqrt{c}$. Вычитая из этого равенства почленно исходное равенство $\sqrt{a+b-c}-\sqrt{a}=\sqrt{b}-\sqrt{c}$, получим, что $a=c$, т.е. $\sqrt{2x-1}=\sqrt{x}$, $x_2=1$.

Ответ: $x_1=\dfrac{1}{2}$, $x_2=1$.