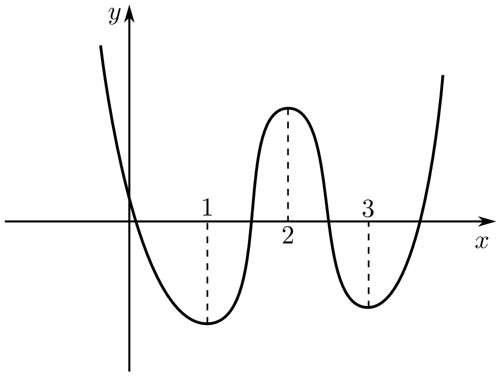
САММАТ-2024
Решение задач 10 класса

Задача №1. При каких значениях параметра m уравнение

$$x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + m = 0$$

имеет 4 вещественных решения?

Решение: Используем функцию $y(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + m$.
$y'(x) = 4(x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 4(x-1)(x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow$ экстремумы $y'(x) = 0 \Rightarrow$ $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$. Поскольку при x^4 знак положительный, то 4 корня эта функция будет иметь только в случае, если ее схематический график имеет вид.



Тогда для определения m получим 3 неравенства:

$$\begin{cases} y(1) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + m|_{x=1} < 0 \\ y(2) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + m|_{x=2} > 0 \\ y(3) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + m|_{x=3} < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -9 + m < 0 \\ -8 + m > 0 \\ -9 + m < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < 9 \\ m > 8 \\ m < 9 \end{cases} \Rightarrow$$

$m \in (8, 9)$

Ответ: $8 < m < 9$.

Задача №2. Найти значение $f(3)$, если для любого $x \neq 0$ справедливо равенство $f(x) + 2f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 2x$.

Решение: Пусть $x = 3$, тогда в уравнении получим

$$f(3) + 2f\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Пусть теперь $x = \dfrac{1}{3}$, тогда в уравнении получим

$$f\left(\frac{1}{3}\right) + 2f(3) = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Выразим из второго равенства $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$, получим $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = -2f(3) + \dfrac{2}{3}$. Подставим полученное выражение в первое равенство, получим

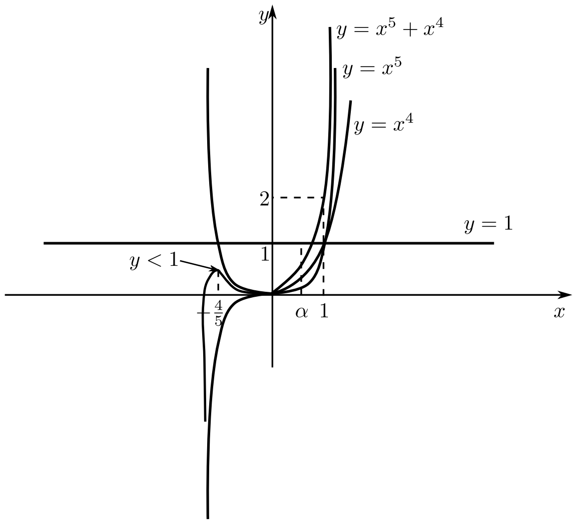
$$f(3) + 2 \cdot \left(-2f(3) + \frac{2}{3}\right) = 6,$$

то есть $-3f(3) = 6 - 2 \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{14}{3}$, откуда находим $f(3) = -\dfrac{14}{9}$.

Ответ: $f(3) = -\dfrac{14}{9}$.

Задача №3. Пусть α — решение (корень) уравнения $x^5 + x^4 = 1$. Найдите $S = 1 - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \alpha^4 - \ldots$.

Решение: Покажем, что $0 < \alpha < 1$.



I) Имеем, $\alpha^4(1+\alpha) = 1$.
Если $\alpha \le -1$, то $\alpha^4(1+\alpha) \le 0$.
Если $-1 < \alpha < 0$, то $\alpha^4(1+\alpha) < \alpha^4 < 1$.
Если $\alpha \ge 1$, то $\alpha^4(1+\alpha) \ge 2$.
Следовательно, остается единственная возможность $0 < \alpha < 1$.

II) $0 < \alpha < 1$ следует из графического решения исходного уравнения.

$S = 1 - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \alpha^4 - \ldots$ — геометрическая бесконечно убывающая прогрессия, поэтому $S = \dfrac{1}{1+\alpha}$. Но учитывая, что $\alpha^5 + \alpha^4 = \alpha^4(1+\alpha) = 1$, можно получить еще ряд представлений $S = \dfrac{1}{1+\alpha} = \dfrac{\alpha^4(1+\alpha)}{1+\alpha} = \alpha^4 = 1 - \alpha^5$.

Ответ: $\dfrac{1}{1+\alpha}$, α^4, $1 - \alpha^5$.

Задача №4. Решите систему уравнений (n — натуральное число, отличное от единицы): $\begin{cases} x_1^2 - x_2x_3x_4\ldots x_n = 0, \\ x_2^2 - x_1x_3x_4\ldots x_n = 0, \\ x_3^2 - x_1x_2x_4\ldots x_n = 0, \\ \ldots \\ x_n^2 - x_1x_2x_3\ldots x_{n-1} = 0. \end{cases}$

Решение: Если хотя бы одна из неизвестных равна нулю, то и все остальные неизвестные также равны нулю. Далее будем рассматривать случай, когда все неизвестные отличны от нуля.

Запишем уравнения в виде $x_1^2 = x_2x_3x_4\ldots x_n$, $x_2^2 = x_1x_3x_4\ldots x_n$, $\ldots$, $x_n^2 = x_1x_2x_3\ldots x_{n-1}$ и перемножим их. Получим $(x_1x_2\ldots x_n)^2 = (x_1x_2\ldots x_n)^{n-1}$. Если $n \ne 3$, то $(x_1x_2\ldots x_n)^{n-3} = 1$, а значит $x_1x_2\ldots x_n = 1$ при четном n, и $x_1x_2\ldots x_n = \pm 1$ при нечетном n. В случае четного n каждое уравнение системы можно переписать в виде $x_k^2 = \dfrac{x_1x_2\ldots x_n}{x_k} = \dfrac{1}{x_k}$, откуда $x_k^3 = 1$, и значит $x_k = 1$, где $1 \le k \le n$. Аналогично, $x_k = \pm 1$ при нечетном n.

Пусть теперь $n = 3$. Обозначим $c = \sqrt[3]{x_1x_2x_3}$. Тогда $x_k^2 = \dfrac{x_1x_2x_3}{x_k} = \dfrac{c^3}{x_k}$ и $x_k = c$, $k = 1; 2; 3$.

Ответ: если n — четное, то $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ или $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$; если n — нечетное и $n \ne 3$, то $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ или $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ или $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = -1$; если $n = 3$, то $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = c$, где c — произвольное действительное число.

Задача №5. Найти сумму векторов с координатами $\{\cos 10°; \sin 10°\}$, $\{\cos 82°; \sin 82°\}$, $\{\cos 154°; \sin 154°\}$, $\{\cos 226°; \sin 226°\}$, $\{\cos 298°; \sin 298°\}$.

Решение: Концы векторов являются вершинами правильного пятиугольника. Рассмотрим сумму четырёх векторов, расположенных симметрично относительно прямой, коллинеарной вектору $\{\cos 10°; \sin 10°\}$. В силу симметрии, в результате сложения этих четырёх векторов получим вектор, коллинеарный вектору $\{\cos 10°; \sin 10°\}$. Тогда если эту сумму этих сложить с вектором $\{\cos 10°; \sin 10°\}$, то снова получим вектор, коллинеарный вектору $\{\cos 10°; \sin 10°\}$. То есть искомая сумма пяти векторов будет коллинеарна вектору $\{\cos 10°; \sin 10°\}$.

Аналогично, выбирая сумму четырёх векторов, расположенных симметрично относительно прямой, коллинеарной другому вектору $\{\cos 82°; \sin 82°\}$, в результате получим, что искомая сумма пяти векторов будет коллинеарна вектору $\{\cos 82°; \sin 82°\}$.

Таким образом, искомая сумма пяти векторов коллинеарна двум ненулевым векторам $\{\cos 10°; \sin 10°\}$ и $\{\cos 82°; \sin 82°\}$. Это означает, что эта сумма векторов равна нулевому вектору $\overrightarrow{0}$.

Ответ: $\overrightarrow{0}$.

Задача №6. Найти максимальную площадь четырехугольника, стороны которого равны 2, 3, 4 и 5.

Решение: Если стороны, длины которых равны 3 и 4 являются противоположными, то любые соседние стороны можно поменять местами, при этом площадь четырехугольника не изменится. Таким образом, можно считать, что стороны 3 и 4 смежные, а значит стороны 2 и 5 тоже смежные. Обозначив диагональ четырехугольника через x, найдем его площадь по формуле Герона (полупериметр $p = \dfrac{7+x}{2}$)

$$S(x) = \sqrt{\frac{7+x}{2} \cdot \frac{7-x}{2} \cdot \frac{x+1}{2} \cdot \frac{x-1}{2}} + \sqrt{\frac{7+x}{2} \cdot \frac{7-x}{2} \cdot \frac{x+3}{2} \cdot \frac{x-3}{2}} = \\ = \frac{1}{4}\left(\sqrt{(49-x^2)(x^2-1)} + \sqrt{(49-x^2)(x^2-9)}\right).$$

Очевидно, что при некотором значении x функция $S(x)$ имеет максимум. Обозначим $x^2 = t$ и найдем производную

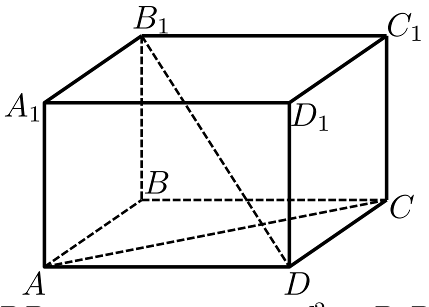
$$S'(t) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2\sqrt{(49-t)(t-1)}} \cdot (50-2t) + \frac{1}{2\sqrt{(49-t)(t-9)}} \cdot (58-2t)\right).$$

Приравняв производную к нулю, после возведения в квадрат и всевозможных сокращений легко получается, что $t = \dfrac{299}{11}$. Значит,

$$S_{\min} = \frac{1}{4}\sqrt{49 - \frac{299}{11}}\left(\sqrt{\frac{299}{11} - 1} + \sqrt{\frac{299}{11} - 9}\right) = \\ = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{240}{11}}\left(\sqrt{\frac{288}{11}} + \sqrt{\frac{200}{11}}\right) = \sqrt{120} = 2\sqrt{30}.$$

Ответ: $2\sqrt{30}$.

Задача №7. Боковые грани параллелепипеда — прямоугольники, а основание — параллелограмм с острым углом α. Меньшая диагональ параллелепипеда равна большей диагонали основания. Найдите отношение квадрата высоты параллелепипеда к площади его основания.



Решение: Пусть a, b — стороны основания, $d = AC = B_1D$ — большая диагональ основания и меньшая диагональ параллелепипеда, $h = BB_1$ — высота параллелепипеда, S — площадь основания. Тогда из теорем косинусов для треугольников ABC и ABD имеем $d^2 = AC^2 = a^2+b^2-2ab\cos(180^\circ-\alpha)$ и $BD^2 = a^2+b^2-2ab\cos\alpha$ соответственно. Применив теперь теорему Пифагора для треугольника B_1BD можем записать $d^2 = B_1D^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha + h^2$.

Приравняем найденные выражения для d^2 и воспользуемся формулой приведения $a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha + h^2$ Значит, $h^2 = 4ab\cos\alpha$.

Площадь параллелограмма, лежащего в основании параллелепипеда, вычисляется по формуле $S = ab\sin\alpha$. Осталось найти искомое отношение $\dfrac{h^2}{S} = \dfrac{4ab\cos\alpha}{ab\sin\alpha} = 4\operatorname{ctg}\alpha$.

Ответ: $4\operatorname{ctg}\alpha$.

Задача №8. Решить неравенство $2^x(2^x + 6x - 22) + 9x^2 - 66x + 85 < 0$.

Решение: Проведем равносильные преобразования исходного неравенства

$$4^x + 6x\cdot 2^x - 22\cdot 2^x + 9x^2 - 66x + 85 < 0,$$
$$9x^2 + 6x\cdot 2^x + 4^x - 22(3x + 2^x) + 85 < 0,$$
$$(3x + 2^x)^2 - 22(3x + 2^x) + 85 < 0.$$

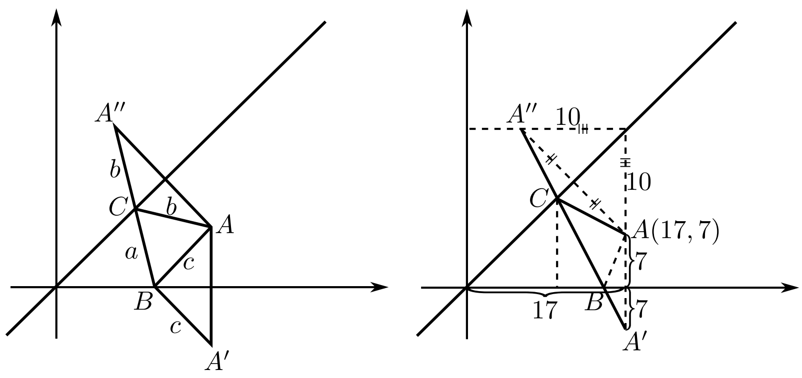
Решаем соответствующее уравнение $(3x + 2^x)^2 - 22(3x + 2^x) + 85 = 0$. Делаем замену $y = 3x + 2^x$ и получаем уравнение $y^2 - 22y + 85 = 0$. Его корни $y_1 = 5$ и $y_2 = 17$. Определяя знаки выражения на промежутках $(-\infty; 5)$, $(5; 17)$, $(17; \infty)$, получаем ответ: $(5, 17)$. Обратная замена приводит к уравнениям $3x + 2^x = 5$ и $3x + 2^x = 17$. Эти уравнения имеют решения $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$ соответственно. Эти решения единственные, так как функция $y = 3x + 2^x$ возрастает на всей числовой прямой.

Ответ: $x \in (1, 3)$.

Задача №9. Рассматриваются всевозможные треугольники на плоскости Oxy, у которых одна из вершин — это точка $A(17, 7)$, другая вершина B — лежит на оси Ox, а третья вершина C — на прямой $y = x$. Найти наименьший периметр такого треугольника.

Решение: Отразим точку A симметрично относительно двух данных прямых. Очевидно, что $P_{ABC} = a + b + c$ равен длине ломаной $A'BCA''$. Поэтому минимальный периметр треугольника получится, когда ломаная превратится в отрезок прямой. По теореме Пифагора

$$P_{\min} = \sqrt{10^2 + 24^2} = \sqrt{100 + 576} = \sqrt{676} = 26.$$



Ответ: 26.

Задача №10. Найти геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют равенству $x^2 + y^2 + x + y - 2\sqrt{x}\sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 0$.

Решение: Равенство из условия последовательно перепишем в виде

$$x^2 + 2x\sqrt{y} + y + y^2 - 2\sqrt{x}y + x = 0,$$
$$(x - \sqrt{y})^2 + (y - \sqrt{x})^2 = 0.$$

Последнее равенство равносильно системе двух уравнений

$$x - \sqrt{y} = 0, \quad y - \sqrt{x} = 0.$$

Решением этой системы является $x = y = 0$, $x = y = 1$.

Ответ: Две точки: $O(0;0)$, $A(1;1)$.