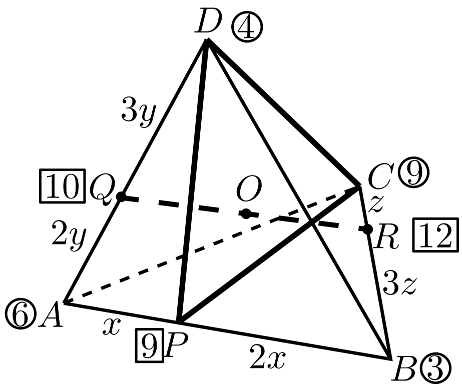
САММАТ-2023
Решение задач 11 класса

Задача №1. В треугольной пирамиде $ABCD$ на ребре AB взята точка P так, что $AP : PB = 1 : 2$, на ребре AD взята точка Q так, что $AQ : QD = 2 : 3$ и на ребре BC точка R такая, что $BR : RC = 3 : 1$. В каком отношении отрезок QR делится плоскостью CDP?



Решение: Применим метод центра тяжести. Поместим в вершины пирамиды такие массы: $A - 6$, $B - 3$, $C - 9$, $D - 4$.

Если из точек A и B убрать обе массы и поставить их сумму в точку P, то центр тяжести всей системы не изменится, поэтому он будет лежать в плоскости CDP.

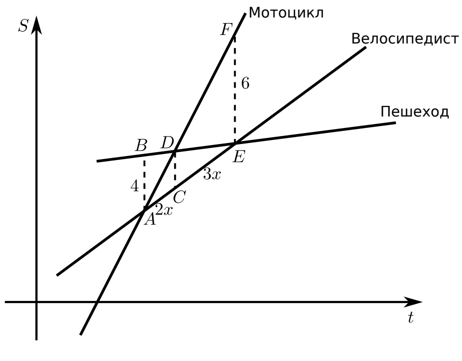
С другой стороны, если убрать две массы из точек A и D и вместо них поставить суммарную массу $6 + 4 = 10$ в точку Q, а вместо точек B и C поставить суммарную массу $3 + 9 = 12$ в точку R, то центр тяжести также не изменится и значит он будет находиться на отрезке QR.

Таким образом, центр тяжести данной системы будет расположен в точке пересечения прямой QR и плоскости CDP, то есть в точке O.

Значит, $QO : OR = 12 : 10 = 6 : 5$.

Ответ: $QO : OR = 6 : 5$.

Задача №2. Пешеход, велосипедист и мотоциклист едут по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход обгонял их на 4 км. В тот момент, когда велосипедист догнал пешехода, мотоциклист обгонял их на 6 км. На сколько километров велосипедист отставал от мотоциклиста в тот момент, когда мотоциклист обгонял пешехода?



Решение: Построим схематично график движения.

По условию задачи $AB = 4$ км, $EF = 6$ км, а требуется найти CD. Очевидно, что треугольники ABD и EDF подобны и их коэффициент подобия $k = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$. С другой стороны, треугольники ACD и AEF также подобны и их коэффициент подобия равен

$$\frac{2x}{2x + 3x} = \frac{2}{5}.$$

Значит, $CD = 6 \cdot \dfrac{2}{5} = 2{,}4$.

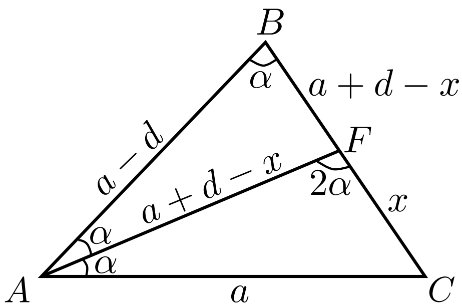
Ответ: $CD = 2{,}4$.

Задача №3. Последовательность $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, задана такими равенствами: $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ и $\frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}$, $n \geq 2$. Найдите такие n, при которых $|a_n| \leq 10^{-3}$.

Решение: Пусть $b_n = \dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_{n-1}}$, $n \geq 2$. Тогда по условию $b_n = \dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_{n-1}} = \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} = b_{n+1}$, $n \geq 2$. Значит, $b_{n+1} = b_n = \ldots = b_2 = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$. Следовательно, $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{a_{n-2}} = \ldots = \dfrac{n-1}{2} + \dfrac{1}{a_1} = \dfrac{n-1}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{n}{2} \Longrightarrow$ $a_n = \dfrac{2}{n}$. Тогда $|a_n| = \left|\dfrac{n}{2}\right| \leq 10^{-3} \Longrightarrow n \geq 2 \cdot 10^3$.

Ответ: $n \geq 2 \cdot 10^3$.

Задача №4. Длины сторон AB, AC, BC треугольника ABC, периметр которого равен 6, в указанном порядке являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Найдите ее разность, если угол $\angle BAC$ в два раза больше угла $\angle ABC$.



Решение: Так как стороны являются последовательными членами арифметической прогрессии, то пусть $AB = a - d$, $AC = a$, $BC = a + d$. При этом заметим, что $d > 0$, так как напротив большего угла в треугольнике лежит большая сторона. Найдем a сложив все стороны и приравняв к 6. Получим $a = 2$.

Проведем биссектрису угла A и отметим равные отрезки и равные углы как на картинке.

По свойству биссектрисы

$$\frac{a}{a-d} = \frac{x}{a+d-x}$$

$$a^2 + ad - ax = ax - xd \tag{1}$$

Так как треугольники ABC и AFC подобны по двум углам

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{a+d} \tag{2}$$

$$a^2 = ax + dx$$

Подставим в (1)

$$ax + dx + ad - ax = ax - xd$$

$$2dx + ad = ax$$

$$x = \frac{ad}{a-2d}$$

Подставим в (2)

$$\frac{d}{a-2d}=\frac{a}{a+d}$$
$$ad+d^2=a^2-2ad$$
$$d^2=a^2-3ad$$
$$d^2=2^2-6d$$
$$d^2+6d-4=0$$
$$d=\sqrt{13}-3$$

Ответ: $d=\sqrt{13}-3$.

Задача №5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций: $y=2\operatorname{arctg}x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$, $y=0$, $x=2$, $x=4$.

Решение:

$$y'=2\cdot\frac{1}{1+x^2}+\frac{\frac{2\cdot(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}=\frac{2}{1+x^2}+\frac{\frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2-4x^2}{(1+x^2)^2}}}=$$
$$=\frac{2}{1+x^2}+\frac{\frac{2(1-x^2)}{1+x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^2}}=\frac{2}{1+x^2}+\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)|1-x^2|}$$

При $x>1$ $|1-x^2|=x^2-1=-(1-x^2)$, $y'=\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{2(1-x^2)}{-(1-x^2)(1+x^2)}=\dfrac{2}{1+x^2}-\dfrac{2}{1+x^2}=0.$

При $x>1$ $y'(x)=0\Rightarrow y(x)=\mathrm{const}$.

$y(x)$ при $x=1$ равна $y(1)=2\operatorname{arctg}1+\arcsin 1=2\cdot\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}=\pi$.

Площадь равна: 2π.

Ответ: 2π.

Задача №6. Пусть a и b натуральные числа такие, что несократимая дробь представима в виде суммы

$$\frac{a}{b}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{118}+\frac{1}{119}.$$

Докажите, что число a делится на 179.

Решение:

$$\frac{a}{b}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{118}+\frac{1}{119}=$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{118}+\frac{1}{119}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{118}\right)=$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{118}+\frac{1}{119}-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{59}\right)=$$
$$=\frac{1}{60}+\frac{1}{61}+\frac{1}{62}+\ldots+\frac{1}{118}+\frac{1}{119}.$$

В сумме 60 слагаемых, разбиваем их на пары

$$\frac{1}{59+k}+\frac{1}{120-k}=\frac{179}{(59+k)(120-k)},$$

для любого k от 1 до 30.

$$\frac{a}{b}=\frac{179x}{60\cdot 61\cdot\ldots\cdot 119}.$$

Так как 179 простое, то получившаяся дробь после сокращения все равно будет иметь в числителе множитель 179, а значит утверждение доказано.

Задача №7. Найти решение уравнения в натуральных числах x и y:

$$\sqrt{x^2+y^2-2x-6y+10}+\sqrt{x^2+y^2-18x-6y+90}-10=0.$$

Решение:

$$x^2+y^2-2x-6y+10=100-20\sqrt{x^2+y^2-18x-6y+90}+x^2+y^2-18x-6y+90 \Rightarrow$$

$$4x-45=-5\sqrt{x^2+y^2-18x-6y+90} \Rightarrow 9(x-5)^2+25(y-3)^2=225 \Rightarrow$$

$$\frac{(x-5)^2}{5^2}+\frac{(y-3)^2}{3^2}=1 \Rightarrow \begin{array}{l}|x-5|\le 5;\\ |y-3|\le 3\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}0\le x\le 10;\\ 0\le y\le 6\end{array}$$

Перебором устанавливаем решения в целых числах: $\begin{cases}x=5,\\ y=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x=0,\\ y=3;\end{cases}$ $\begin{cases}x=10,\\ y=3;\end{cases}$ $\begin{cases}x=5,\\ y=6;\end{cases}$

В натуральных числах получаем 2 решения $\begin{cases}x=10,\\ y=3;\end{cases}$ $\begin{cases}x=5,\\ y=6;\end{cases}$

Ответ: $(10,3)$, $(5,6)$.

Задача №8. Вершины правильного 11-угольника раскрашены в 2 цвета: красный и синий. Может ли оказаться так, что для каждой вершины A этого 11-угольника найдутся такие красные вершины B и C, а также синие вершины D и E, что выполняются равенства $AB=AC$ и $AD=AE$?

Решение: От противного. Пусть такая ситуация возможна. Заметим, что вершин какого-то цвета, например, красного, не больше 5. Тогда количество отрезков, у которых оба конца красного цвета, не больше $\frac{5\cdot 4}{2}=10$.

С другой стороны, для каждой вершины A 11-угольника найдутся такие вершины B и C красного цвета, что $AB=AC$. Заметим, что точка A лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BC и никакая другая вершина 11-угольника на этом перпендикуляре не лежит. Значит, количество отрезков с концами в вершинах красного цвета должно быть не меньше количества вершин, т.е. 11. Противоречие для вершин с общими красными концами. В силу «симметрии» задачи аналогичные рассуждения можно выполнить и для отрезков с обоими синими концами.

Ответ: такая ситуация невозможна.

Задача №9. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\frac{a^2 + x^2 - 4x - 6a - 23}{\sqrt{a^2 + ax - 2x^2 - 2a - x + 1}} = 0$$

имеет единственное решение.

Решение: Область допустимых значений уравнения определяется неравенством

$$a^2 + ax - 2x^2 - 2a - x + 1 > 0.$$

Выражение слева представляет собой квадратный трёхчлен относительно a. Найдем его корни, получим

$$\begin{gathered} a^2 + a(x-2) - 2x^2 - x + 1 = 0, \quad \Rightarrow \\ D = (x-2)^2 - 4\cdot(-2x^2 - x + 1) = x^2 - 4x + 4 + 8x^2 + 4x - 4 = 9x^2, \quad \Rightarrow \\ a_1 = \frac{2 - x + 3x}{2} = x + 1, \quad a_2 = \frac{2 - x - 3x}{2} = -2x + 1, \quad \Rightarrow \\ a^2 + a(x-2) - 2x^2 - x + 1 = (a - x - 1)(a + 2x - 1). \end{gathered}$$

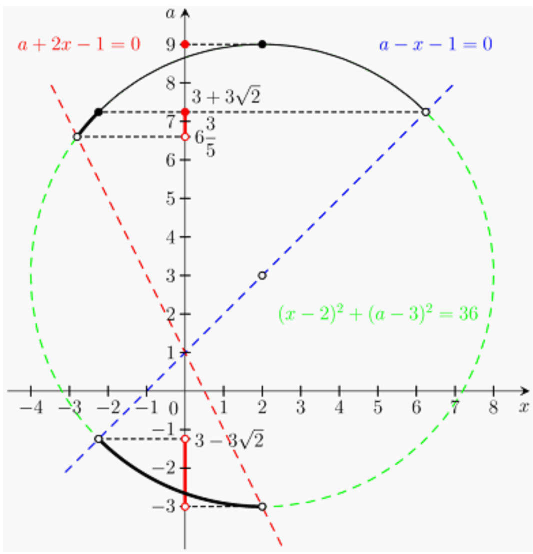
Поэтому неравенство равносильно неравенству

$$(a - x - 1)(a + 2x - 1) > 0,$$

или совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} a - x - 1 > 0, \\ a + 2x - 1 > 0, \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} a - x - 1 < 0, \\ a + 2x - 1 < 0. \end{cases}$$

Первая система неравенств определяет область декартовой плоскости Oxa — внутреннюю часть угла, расположенного выше прямых, а вторая — ниже прямых, определяемых уравнениями $a - x - 1 = 0$ и $a + 2x - 1 = 0$.



Уравнение

$$a^2 + x^2 = 23 + 4x + 6a, \ \Rightarrow \ a^2 - 6a + x^2 - 4x - 23 = 0, \ \Rightarrow$$
$$a^2 - 6a + 9 + x^2 - 4x + 4 - 36 = 0, \ \Rightarrow \ (a-3)^2 + (x-2)^2 = 36,$$

определяет окружность с радиусом $R = 6$ и центром в точке с координатами $x = 2$, $a = 3$.

Найдем точки пересечения этой окружности с найденными прямыми.

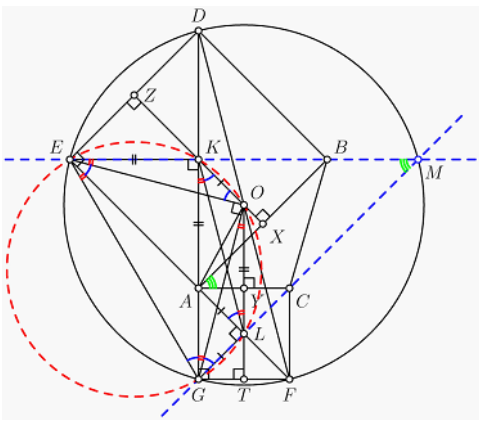
1) $\begin{cases} (a-3)^2 + (x-2)^2 = 36, \\ a - x - 1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x-2)^2 = 36, \\ a = x + 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = 18, \\ a = x + 1, \end{cases} \Rightarrow$
$\begin{cases} x - 2 = \pm 3\sqrt{2}, \\ a = x + 1, \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2 - 3\sqrt{2},\ a_1 = 3 - 3\sqrt{2}$, или $x_2 = 2 + 3\sqrt{2}$, $a_2 = 3 + 3\sqrt{2}$;

2) $\begin{cases} (a-3)^2 + (x-2)^2 = 36, \\ a + 2x - 1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-2x-2)^2 + (x-2)^2 = 36, \\ a = -2x + 1, \end{cases} \Rightarrow$
$\begin{cases} 4x^2 + 8x + 4 + x^2 - 4x + 4 = 36, \\ a = -2x + 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x^2 + 4x - 28 = 0, \\ a = -2x + 1, \end{cases} \Rightarrow x_3 = -\dfrac{14}{5} = -2\dfrac{4}{5}$,
$a_3 = \dfrac{33}{5} = 6\dfrac{3}{5}$ или $x_4 = 2$, $a_4 = -3$.

Уравнение будет иметь единственное решение, если горизонтальная прямая с уравнением $y = a$ пересекает объединение двух дуг окружности, лежащих в двух указанных выше угловых областях только в одной точке (смотри рисунок). Таким образом, искомое множество значений параметра a есть объединение $(-3; 3 - 3\sqrt{2}) \cup \left(6\dfrac{3}{5}; 3 + 3\sqrt{2}\right] \cup \{9\}$.

Ответ: $(-3; 3 - 3\sqrt{2}) \cup \left(6\dfrac{3}{5}; 3 + 3\sqrt{2}\right] \cup \{9\}$.

Задача №10. Дан треугольник $\triangle ABC$ с острым углом $\angle A$ такой, что $AB \neq AC$. На сторонах AB и AC вне треугольника построены квадраты $ABDE$ и $ACFG$ с центрами K и L. Оказалось, что точки D, E, F и G лежат на одной окружности ω с центром O. Доказать, что точка M пересечения прямых BE и CG лежит на окружности ω.



Решение: Обозначим длины сторон треугольника $AB = a$ и $AC = b$. Пусть точка O — центр окружности ω, на которой лежат вершины квадратов D, E, G и F.

Точка O равноудалена от вершин D и E квадрата $ABDE$, поэтому она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку ED, а, значит, и к отрезку AB, поэтому она также равноудалена вершин A и B треугольника $\triangle ABC$. Аналогично точка O равноудалена от вершин F и G квадрата $ACFG$, поэтому она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку FG, а, значит, и к отрезку AC, поэтому она также равноудалена вершин A и

C треугольника $\triangle ABC$. Следовательно, точка O также является центром описанной окружности треугольника $\triangle ABC$.

Обозначим через K и L центры квадратов $ABDE$ и $ACFG$, а через X, Y, Z и T — середины отрезков AB, AC, DE и FG соответственно. Пусть длины сторон треугольника $\triangle ABC$ равны $AB = a$ и $AC = b$, тогда $AX = KX = KZ = ZE = \dfrac{a}{2}$ и $AY = YL = LT = TG = \dfrac{b}{2}$. Пусть ориентированная длина отрезка XO равна x, причём $x > 0$, если точка O лежит вне квадрата $ABDE$ и $x < 0$, если точка O лежит внутри квадрата $ABDE$. Аналогично пусть ориентированная длина отрезка YO равна y, причём $y > 0$, если точка O лежит вне квадрата $ACFG$ и $y < 0$, если точка O лежит внутри квадрата $ACFG$. Тогда $OK = x + \dfrac{a}{2}$ и $OL = y + \dfrac{b}{2}$, а также $OZ = x + a$ и $OT = y + b$.

Из прямоугольных треугольников $\triangle EZO$, $\triangle GTO$, $\triangle AXO$ и $\triangle AYO$ по теореме Пифагора получаем равенства

$$OZ^2 + ZE^2 = OE^2 = OG^2 = OT^2 + TG^2, \quad OX^2 + XA^2 = OA^2 = OY^2 + YA^2,$$

то есть

$$(x+a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = (y+b)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2, \quad x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = y^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2, \ \Rightarrow$$

$$x^2 + 2ax + a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = y^2 + 2by + b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2, \quad x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = y^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2, \ \Rightarrow$$

$$2ax + a^2 = 2by + b^2, \ \Rightarrow a(2x+a) = b(2y+b), \ \Rightarrow \frac{2x+a}{b} = \frac{2y+b}{a}, \ \Rightarrow$$

$$\frac{x + \frac{a}{2}}{\frac{b\sqrt{2}}{2}} = \frac{y + \frac{b}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}, \ \Rightarrow \ \frac{OK}{AL} = \frac{OL}{AK}.$$

Так как $\angle AKO = \angle ALO = 45^\circ$, тогда треугольники $\triangle AKO$ и $\triangle ALO$ подобны, поэтому $\dfrac{OK}{AL} = \dfrac{OL}{AK} = \dfrac{AO}{AO} = 1$, то есть треугольники $\triangle AKO$ и $\triangle ALO$ не подобны, а равны. Следовательно, $OK = AL = GL$ и $OL = AK = EK$, поэтому четырёхугольник $AKOL$ — параллелограмм, откуда $AL || OK || AE$ и $AK || OL || AG$. Это означает, что точки G, A, K, D лежат на одной прямой, а также точки E, A, L, F лежат на одной прямой. Поэтому $AD \perp AC$ и, значит, $\angle BAC = \angle DAC - \angle DAB = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.

Четырёхугольник $KOLG$ — равнобокая трапеция, поэтому точки K, O, L, G лежат на одной окружности, описанной около треугольника $\triangle KOL$. Аналогично четырёхугольник $LOKE$ — равнобокая трапеция, поэтому точки L, O, K, E лежат на одной окружности, описанной около треугольника $\triangle KOL$. Поэтому все пять точек E, K, O, L и G лежат на одной окружности Ω, описанной около треугольника $\triangle KOL$.

Пусть прямые EB и GC пересекаются в точке M. Так как углы треугольника $\triangle EGM$ равны $\angle MEL = \angle OLE = 45^\circ$ и $\angle ELM = 90^\circ$, тогда $\angle EMG = 45^\circ$. Треугольник $\triangle EOG$ равнобедренный с углами при основании, равными $\angle EGO = \angle ELO = 45^\circ$, тогда угол при вершине равен $\angle EOG = 90^\circ = \breve{AC}$. Но так как угол $\angle EMG = 45^\circ$ опирается на дугу $\breve{AC} = 90^\circ$, то точка M лежит на окружности ω с центром в точке O, что требовалось доказать.