САММАТ-2022
Решение задач 8 класса

Задача №1. Пусть y — действительное число, отличное от нуля. Известно, что x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 + \frac{x}{y} - \frac{y^2}{2} = 0$. Докажите, что $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$.

Решение: По теореме Виета справедливы равенства $x_1 + x_2 = -\frac{1}{y}$, $x_1 x_2 = -\frac{y^2}{2}$. Тогда получаем

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = ((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2)^2 - 2x_1^2x_2^2 =$$
$$= ((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = \left(\left(-\frac{1}{y}\right)^2 - 2\left(-\frac{y^2}{2}\right)\right)^2 - 2\left(-\frac{y^2}{2}\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{1}{y^2} + y^2\right)^2 - \frac{y^4}{2} = \frac{1}{y^4} + 2 + y^4 - \frac{y^4}{2} = \frac{1}{y^4} + \frac{y^4}{2} + 2.$$

По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим находим искомую оценку

$$x_1^4 + x_2^4 = \frac{1}{y^4} + \frac{y^4}{2} + 2 \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{y^4} \cdot \frac{y^4}{2}} + 2 = 2 + \sqrt{2}.$$

Задача №2. Докажите, что для последовательности чисел $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_9$ выполняется следующее неравенство

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_8 + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3.$$

Решение: Так как $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_9$, то $a_1 + a_2 + a_3 < 3a_3$, $a_4 + a_5 + a_6 < 3a_6$, $a_7 + a_8 + a_9 < 3a_9$. Сложив все три неравенства и разделив на $a_3 + a_6 + a_9$, получим

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_8 + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3.$$

Задача №3. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 - |x + a + 3| = |x - a - 3| - (a + 3)^2$$

имеет единственное решение.

Решение: Обозначим: $t = a + 3$, уравнение примет вид

$$x^2 + t^2 - |x + t| - |x - t| = 0.$$

В силу четности левой части по x для единственности решения уравнения необходимо, чтобы $x = 0$ было его решением. То есть t должно быть решением уравнения $t^2 - 2|t| = 0$, откуда

$$1)\ t = 0, \quad 2)\ t = -2, \quad 3)\ t = 2.$$

Проверкой устанавливаем, что в первом случае исходное уравнение имеет 3 решения, второй и третий случай симметричны и достаточно проверить один из них. Например, проверим $t = 2$. Если $|x| > 2$, решения уравнения:

$$x^2 + 4 - |x + 2| - |x - 2| = 0$$

не существует; если $|x| \leq 2$, то его решение $x = 0$ единственно. Возвращаясь к параметру a, получаем $a = -1$, $a = -5$.

Ответ: $a = -1$, $a = -5$.

Задача №4. В коробке находится в совокупности 30 черных и белых шаров, при этом среди любых 12 шаров есть хотя бы один белый, а среди любых 20 шаров хотя бы один черный. Сколько белых шаров в коробке?

Решение: Пусть в коробке Б белых шаров и Ч черных. Тогда Б $+$ Ч $= 30$; Б ≤ 19, иначе возможен вариант, когда среди 20 шаров нет ни одного черного. По аналогичной причине Ч ≤ 11. Тогда Б $= 30 -$ Ч $\geq 30 - 11 = 19$. Но Б ≤ 19.

Ответ: 19.

Задача №5. Назовем натуральное число интересным, если оно представимо в виде $m^2 + 4n^2$, где m и n — целые числа. Является ли произведение двух интересных чисел также интересным числом? Ответ обоснуйте.

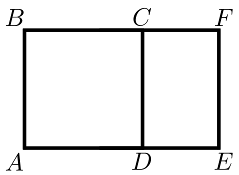
Решение: Возьмем m_1, m_2, n_1, n_2 — целые числа и рассмотрим произведение:

$$\begin{gathered}(m_1^2 + 4n_1^2) \cdot (m_2^2 + 4n_2^2) = m_1^2 m_2^2 + 4m_1^2 n_2^2 + 4n_1^2 m_2^2 + 4n_1^2 n_2^2 = \\ = (m_1 m_2 - 4n_1 n_2)^2 + 4(m_1 n_2 + n_1 m_2)^2.\end{gathered}$$

Следовательно, произведение является интересным числом, так как представимо в нужном виде и $m_1 m_2 - 4n_1 n_2$, $m_1 n_2 + n_1 m_2$ — целые числа.

Ответ: Да, является.

Задача №6. Задан квадрат $ABCD$ со стороной, равной 2. К нему пристроен прямоугольник $CDEF$ (см. рис.). При помощи циркуля и линейки построить прямоугольник $CDEF$, подобный прямоугольнику $ABFE$.



Решение: Пусть сторона квадрата равна 2, обозначим $DE = x$. $ABFE \sim CFED$, тогда $\dfrac{x}{2} = \dfrac{2}{x+2} \Rightarrow x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{5}$.

Алгоритм: 1) делим отрезок AD пополам; 2) находим величину $\sqrt{5}$ из прямоугольного треугольника с катетами 1 и 2, гипотенуза равна $\sqrt{5}$; 3) строим отрезок $1+\sqrt{5}$; 4) продолжаем стороны AD и BC и на их продолжениях откладываем отрезки длиной $1 + \sqrt{5}$, получаем точки E и F. Решение: прямоугольник $CDEF$.

Задача №7. Число a при делении на 13 дает остаток 7. Каким будет остаток при делении на 13 числа $15a^2 + 4a + 9$?

Решение: Число a можно представить так: $a = 13k + 7$, где k — целое число, поэтому остаток от деления числа $15a^2 + 4a + 9$ (при указанном k) на 13 будет равен остатку от деления числа $15 \cdot 49 + 28 + 9 = 772$ на 13. Легко подсчитать, что искомый остаток равен 5.

Ответ: 5.

Задача №8. Сравните числа $2^{17^{17}}$ и $17^{2^{17}}$.

Решение: Заметим, что $17 < 32 = 2^5$, поэтому справедлива следующая цепочка неравенств, из которой следует искомое сравнение

$$17^{2^{17}} < (2^5)^{2^{17}} = 2^{5 \cdot 2^{17}} < 2^{5^{17} \cdot 2^{17}} = 2^{10^{17}} < 2^{17^{17}}.$$

Ответ: Первое число гораздо больше.

Задача №9. Попарно различные числа a, b, c удовлетворяют условию $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$. Какие значения может принимать $a \cdot b \cdot c$?

Решение: Из условия следует, что $a - b = \frac{b-c}{bc}$, $b - c = \frac{c-a}{ca}$, $c - a = \frac{a-b}{ab}$. Перемножая все эти равенства, получим

$$(a-b)(b-c)(c-a) = \frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(abc)^2}.$$

Следовательно, $abc = \pm 1$.

Приведем примеры: для $abc = -1$ подойдет тройка (-1;1/2;2); для $abc = 1$ подойдет тройка (1;-1/2;-2)

Ответ: ± 1.

Задача №10. Известно, что квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет корни. Имеет ли корни квадратный трехчлен $a^3x^2 + b^3x + c^3$? Ответ обоснуйте.

Решение: Так как квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет корни, то $b^2 \geq 4ac$. Если квадратный трехчлен $a^3x^2 + b^3x + c^3$ имеет корни, то должно выполняться условие $b^6 \geq 4a^3c^3$ и обратное тоже верно. Возведем в третью степень неравенство $b^2 \geq 4ac$, получим $b^6 \geq 64a^3c^3$.

При $ac \geq 0$ $64a^3c^3 \geq 4a^3c^3$, а значит $b^6 \geq 4a^3c^3$.

При $ac < 0$ $64a^3c^3 < 0$, $b^6 \geq 0$, а значит $b^6 \geq 4a^3c^3$.

Следовательно, в любом случае $b^6 \geq 4a^3c^3$. Таким образом, квадратный трехчлен $a^3x^2 + b^3x + c^3$ имеет корни.

Ответ: да, имеет.